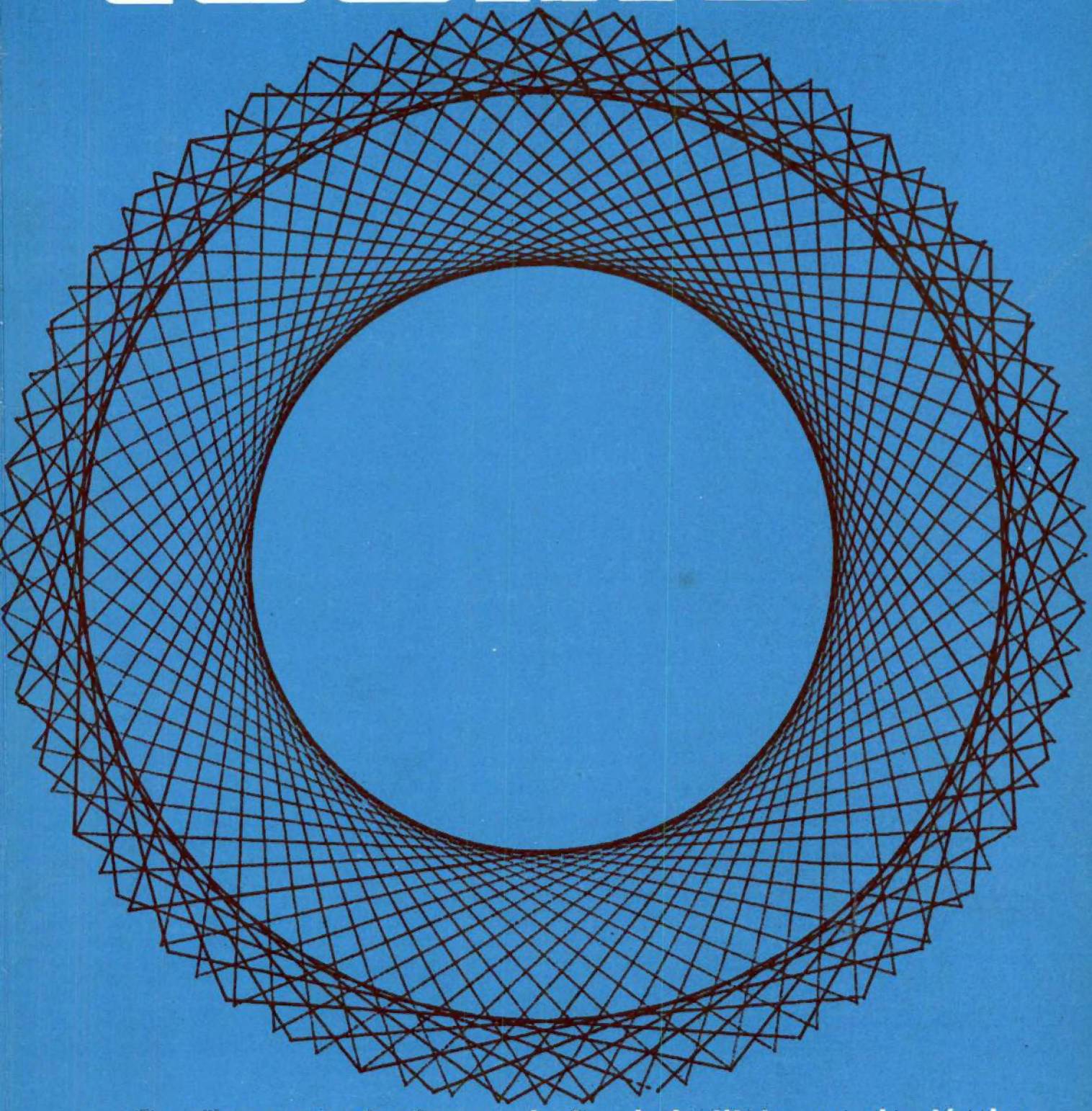
técnica



424 associação dos estudantes do instituto superior técnico
março 1975 revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA
S. A. R. L.

SEDE
Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO
TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

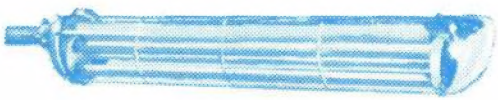
DELEGAÇÃO
Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA
TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 41 91

•

ELECTRICIDADE DO LINDOSO E DAS CENTRAIS DO FREIXO E DA CACHOFARRA

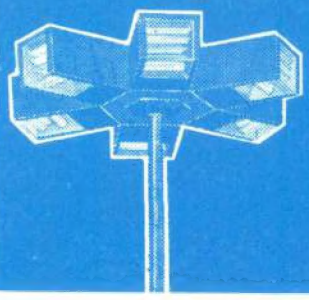
•

A **UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA** distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.



ARMADURA GN

Iluminação é o nosso ofício



SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide — Tel. 219 00 37

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA LISBOA

OFERTA

técnica

NÚMERO 424 MARÇO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José de Oliveira Paulo

CHEFE DE REDACÇÃO
Rogério Caldas Pinto

ADMINISTRADOR
Delmar Baptista

SECRETÁRIO
António Maria da Fonseca

REDACTORES
José Agostinho Marques
Jorge Braz
Armando Ruano

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I. S. T. — Lisboa
Telefone 72 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

★

ASSINATURAS:	5 n.os	10 n.os
Continente e ilhas	140$00	250$.
Países de língua Portuguesa e Espanha	150$00	270$.
Estrangeiro	—	300$.
Número avulso	—	35$.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

★

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
MOVIGRÁFICA
Rua do Espírito Santo, 19-A - Odivelas

SUMÁRIO

167 — LUÍS HENRIQUE MARTINS BORGES DE ALMEIDA e GUILHERME DINIZ MORENO DA SILVA ARROZ — *Estudo experimental da aplicação do Cepstro à detecção de ecos e periodicidades em sinais.*

An experimental study of the Cepstrum applications to echos and periodicities de tection.

185 — J. S. BRAZÃO FARINHA — *Vigas continuas parcialmente encastradas.*

Continuous partial fixed end beams.

213 — LEOPOLDO J. M. GUIMARÃES — *Espectros de massa e de energia na formação de peliculas finas usando o processo de «evaporação por impacto».*

Energy analysis of particles on the substrate using a process «cathodic sputtering».

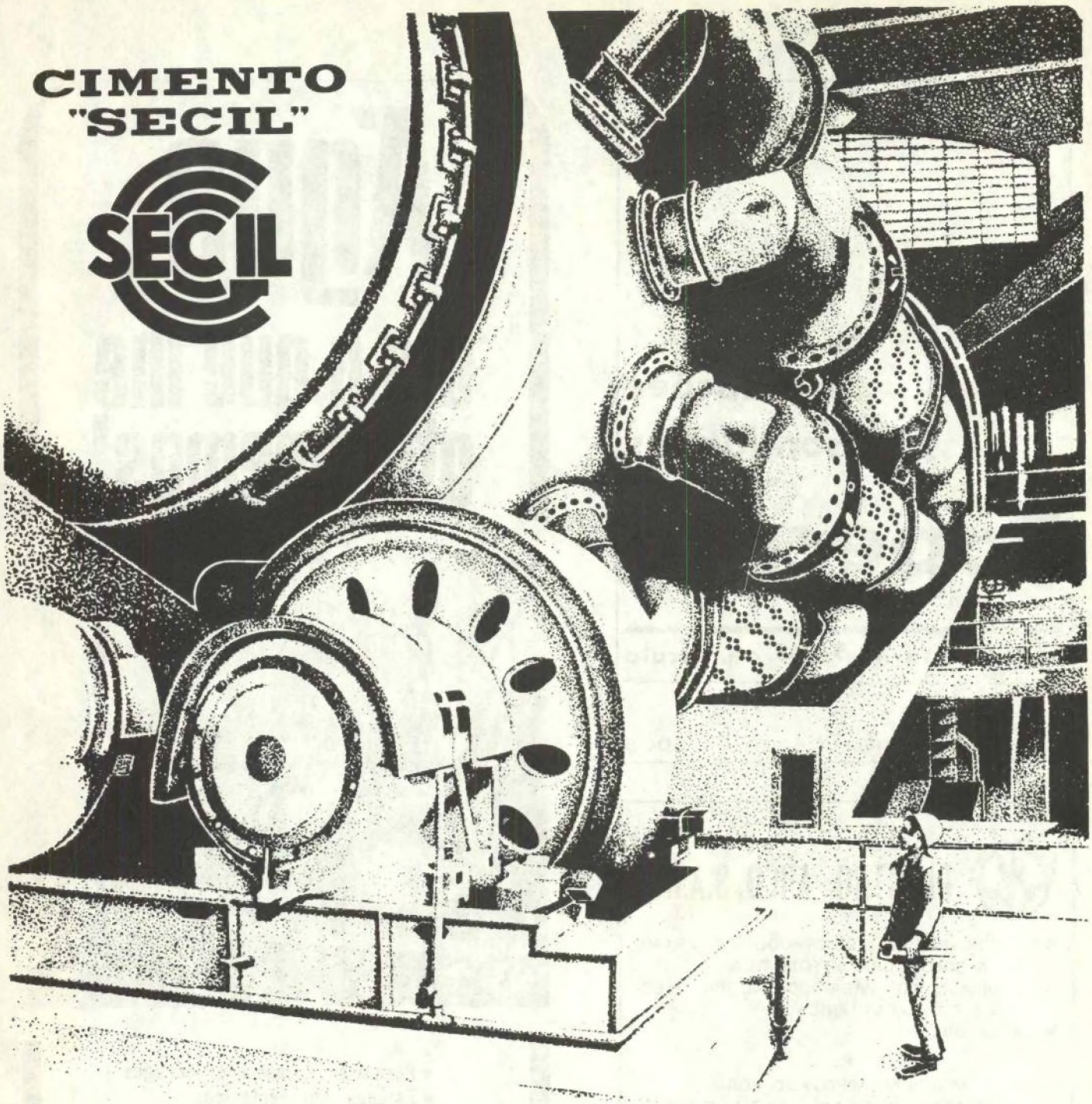
221 — J. MATHIEU — *Diffusion dans les couches limites stratifiées.*

Difusão nas camadas limites estratificadas.

CAPA — Curvas de Lissajous.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	pág.
Cimento Secil	I
Construções Técnicas	XV
Construções Schréder	2.ª da capa
EFACEC	XIII
Electrotécnicos Reunidos	XIV
Electro-Arco, Lda.	II
Empreza de Cimentos de Leiria	V
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XII
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XI
Fanafel	XI
Ferrunil	IV
Harker Sumner	XVI
Heliaço	2.ª da capa
Isolux	IV
MAGUE	IX
Novobra, Lda.	X
Rotring	VII
Sociedade Portuguesa Cavan	IV
S. K. F., Lda.	III
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sopecate	II
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa



CIMENTO "SECIL"

qualidade do produto - qualidade do serviço

FÁBRICA
OUTÃO - SETÚBAL - telfs: 208 04 24 - 2 30 83

LISBOA
Av. Cons. Fernando de Sousa, 19 - 18º - telf: 65 54 31 ..... telex: 12114 SECIL

PORTO
R. do Ouro, 1032 - telf: 60641

SECIL

fundações
sondagens

Sopecate

especialista há ¾1/4¾ de século

rua do arsenal 146-2º tlf 36 40 10 · Lisboa

ELECTRO-ARCO, S.A.R.L.

- FABRICANTE DE ELÉCTRODOS E ARAME PARA SOLDADURA AUTOMÁTICA
- EQUIPAMENTO PARA SOLDADURA ELÉCTRICA E OXI-ACETILÉNICA
- ACESSÓRIOS

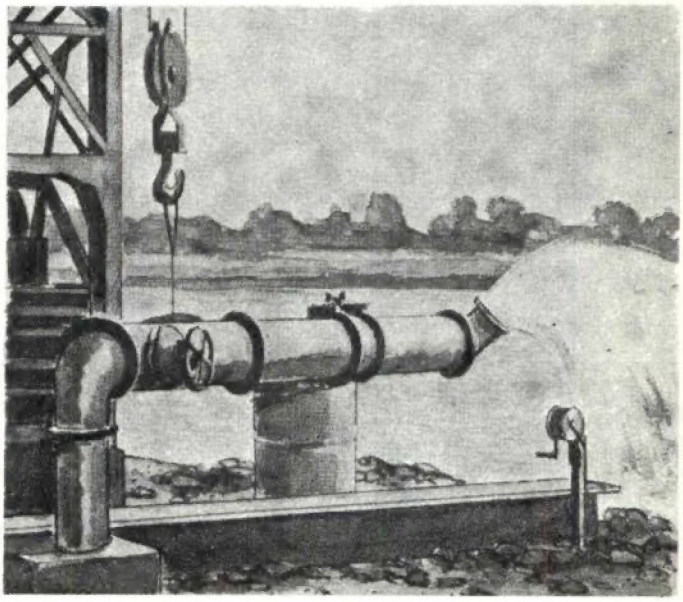
★

MATERIAL APROVADO POR
AMERICAN BUREAU OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
DET NORSKE VERITAS
GERMANISCHER LLOYD
INSTITUTO DE SOLDADURA
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING

★

SEDE, FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Rua Vice-Almirante Azevedo Coutinho, 4
VENDA NOVA — AMADORA
Telefs. 97 63 21 - 97 17 33 - 97 64 71 - 97 06 13
DELEGAÇÃO NO NORTE
Rua Delfim Ferreira, 525
PORTO
Telef. 6 21 24

Água: eis o que lhe oferecemos!



- Pesquisas e captações de água
- Estudos hidrogeológicos
- Sondagens e Fundações
- Rebaixamento de níveis aquíferos

ACAVACO

R. Rodrigo da Fonseca, 62, r. c-Esq. - Lisboa-1
Tel. 56 11 71/2/3/4

SKF

A SKF não tem apenas rolamentos de esferas e de rolos .

Temos também rolamentos de agulhas

rótulas e embutes .

Evidentemente, temos do mesmo modo toda a espécie de acessórios para rolamentos.

Além disso a SKF fabrica muitos outros produtos de qualidade.

Rodas e carretos cónicos, por exemplo

Fusos roscados de rolamento de alta precisão que transformam o movimento de rotação em linear.

Fabricamos também machos cassonetes

e brocas .

O mesmo se passa com pontos rotativos .

E muitos sabem que também temos um bom Serviço Técnico.

SOCIEDADE SKF LIMITADA

LISBOA - PRAÇA DA ALEGRIA, 66-A
TELEF.: 362301 - TELEGR.: ESKAEF - TELEX: 12156

PORTO - RUA DELFIM FERREIRA, 604
TELEF.: 692054 - TELEGR.: ESKAEF

ISOLUX L.DA

ESTUDOS E INSTALAÇÕES ELÉCTRICAS

Porto

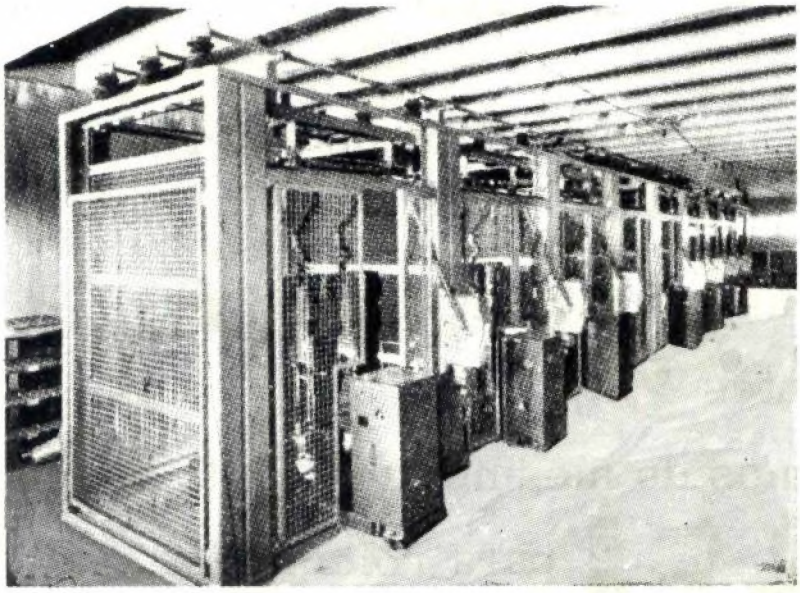
R. Dr. Alfredo Magalhães, 110 - 2º. Dtº.

Tel. 20723

Lisboa

L. Campo Pequeno, 21 - 4º Esq

Tel. 77 00 30/8/9



CELAS ABERTAS DE ALTA TENSÃO

Projectos e instalações eléctricas de:

Centrais

Subestações

Postos de Transformação

Fábricas

Edifícios públicos

Blocos residenciais

Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

FERRUNIL

CONSTRUÇÕES METÁLICAS INDUSTRIAIS, LDA

ESTRUTURAS - RESERVATÓRIOS
VIGAMENTOS - SILOS
PONTES ROLANTES
EQUIPAMENTO INDUSTRIAL

COBERTURAS PARA:
ARMAZÉNS
UNIDADES INDUSTRIAIS
HANGARES
PAVILHÕES DESPORTIVOS, ETC.

FÁBRICA:
Trajouce 247 9256
247 9230

ESCRITÓRIOS:
Av. Elias Garcia, 162, 2º E(L1) *77 77 96
*77 77 97
*77 75 29
LISBOA *77 26 35

os cimentos cimentam o desenvolvimento do país!

A **EMPREZA DE CIMENTOS DE DE LEIRIA, S. A. R. L.** é, em Portugal, a precursora da moderna indústria cimenteira.
Produzindo cimentos da mais alta qualidade, introduziu, no País, o primeiro forno rotativo e dispõe, actualmente, de uma capacidade de produção de **850.000** toneladas anuais.

A **EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA, S. A. R. L.**, com uma actividade diversificada em vários materiais de construção, tem sido a fornecedora de obras da maior importância, como: estradas, pontes, aeroportos, barragens, portos de mar, etc.

A **EMPREZA DE CIMENTOS DE DE LEIRIA, S. A. R. L.** mantém uma actividade industrial que se identifica com o desenvolvimento da construção do nosso País.

EMPREZA DE CIMENTOS DE LEIRIA, S.A.R.L.

Rua Braamcamp, 7 — Lisboa 1 Telefs. 5 91 61/66

Já pensou...

... que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica REVISTA DE ENGENHARIA

Avenida Rovisco Pais • Lisboa 1 • Telef. 72 93 23

INFORMAÇÃO rotring

O PREFERIDO

RAPIDOMAT EM «CASSETTE» DA ROTRING – ACESSO PERMANENTE
Pretende-se que a tinta-da-china seque logo após aplicação sobre papel mas que se mantenha fluida dentro da caneta. O rapidomat em «cassette» mantém as canetas prontas a escrever graças ao seu elemento higroscópico integrado. Acaba-se o constante atarrachar das tampas durante o trabalho ao mudar a espessura do traço.

1. ARRUMAÇAO FACILITADA
O rapidomat em «cassette» contem 4 instrumentos de desenho rotring micronorm m̄ de precisão, nas espessuras de 0,25 – 0,35 – 0,5 – 0,7 mm, os cabos respectivos, uma articulação e uma abraçadeira de 4 mm ⌀ e também um frasco de tinta-da-china de 23 ml.
Cada instrumento tem o seu lugar pré-destinado, mantendo-se assim a arrumação indispensável aos seus desenhos de precisão.

Artigo 150 853

2. SEMPRE PRONTOS A DESENHAR
Os seus instrumentos de desenho não estão dispersos durante o trabalho. Estão arrumados, à mão, no seu rapidomat. Sem tampas. Deixa de ser necessário enroscar e desenroscar as tampas durante o trabalho. O ar húmido que circula no rapidomat mantém os seus instrumentos de desenho sempre prontos para desenhar.
IMPORTANTE: Reencher regularmente com água da torneira. E é tudo o que o seu rapidomat precisa.

3. TINTA-DA-CHINA ADEQUADA AOS INSTRUMENTOS DE DESENHO ROTRING
Sem a tinta adequada, o melhor instrumento de desenho perde metade do seu valor.
A rotring criou tintas-da-china com as quais se obtem traços de recorte preciso, opacos, permitindo reproduções e microfilmagem. E isto com um período de secagem muitissimo curto. E também a fluidez necessária para desenhar com rapidez.
As tintas-da-china rotring apresentam-se em práticos cartuchos bem como em frascos de formatos e tamanhos racionais, nas cores preta, vermelha, azul, verde, amarela e castanha.
Trabalho de precisão exige instrumentos de precisão.

rotring-werke Riepe KG, P.O. Box 541060, D-2 Hamburg 54

Representante em Portugal e Ilhas
ARTUR WESTHEIMER, LDA.
Rua Maria Andrade, 42-2º
Lisboa-1

A venda no seu fornecedor da especialidade

rotring
ABSOLUTA PRECISÃO

9108 A-Por

técnica

NÚMERO 424 MARÇO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.3:517.512.2

Estudo experimental da aplicação do cepstro (1) à detecção de ecos e periodicidades em sinais

LUIS HENRIQUE MARTINS BORGES DE ALMEIDA
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Bolseiro do Lab. de Análise de Sinais (C. I.) do I. A. C.
GUILHERME DINIZ MORENO DA SILVA ARROZ
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Bolseiro do Lab. de Análise de Sinais (C. I.) do I. A. C.

RESUMO

Este artigo, que constituiu relatório de um estágio, realizado no Centro de Estudos de Electrónica, passa rapidamente em revista a técnica do Cepstro, pondo em relevo a sua utilidade na detecção de ecos e periodicidades, e na demarcação, com precisão, da época da sua ocorrência. Além de uma breve análise teórica da técnica utilizada, apresentam-se algumas simulações em computador e também alguns casos reais.

SYNOPSIS

This paper, wich is a trainee report of a work done in the Centro de Estudos de Electrónica, shortly describes, with examples, the Cepstrum technique outlining its usefullness in the deteccion of echoes and periodicities, and in defining the exact epoch they occur in. Apart from a brief theoretical analysis of the technique, some simulations in a computer and some real examples are treated.

0 — INTRODUÇÃO

Surgem com frequência, em trabalhos de análise de sinais, casos em que se torna necessária a detecção de periodicidades um pouco escondidas na complexidade do sinal, quando este é de origem experimental, detecção de ecos, mesmo quando estes diferem de algum modo do sinal primitivo, indentificação da presença e da localização de sinais de forma mais ou menos conhecida imersos em ruído, etc. Este tipo de problemas encontra-se nos mais diversos ramos do desenvolvimento científico, como sejam as telecomunicações, a acústica, a sismologia e a cristalografia.

A ferramenta matemática tradicional usada para tratar este tipo de questões, quando o sinal é suficientemente complexo para que uma análise mais ou menos empírica não permita tirar as conclusões desejadas, é a correlação, quer do sinal consigo mesmo, quer de dois sinais diferentes. Este método revela-se, como se verá resumidamente na sequência, perfeitamente apropriado em certos casos, principalmente quando se trata da análise de sinais de banda larga, mas começa a falhar quando, sendo a banda mais estreita, a precisão pretendida na determinação da localização dos sinais a detectar é da ordem de grandeza do intervalo de tempo em que a autocorrelação do sinal toma valores apreciáveis.

Num simpósio realizado em 1962 na Universidade de Brown, Providence, Rhode Island, sobre o tema «Análise de Séries no Tempo», foi apresentada, por R. P. Bogert, M. J. Healy e J. W. Tukey, uma comunicação intitulada «The Quefrency Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking» [1] no qual os autores introduzem, entre outras, a técnica do «cepstrum» (que traduziremos por cepstro), a qual concluem ser apropriada para o tratamento do problema que tinham em vista (detecção de ecos em sinais sísmicos), pelo menos nos casos simulados que experimentaram.

(1) Deve pronunciar-se «Képstro».

Posteriormente surgiram vários outros trabalhos, em que esta técnica ou outras semelhantes são aplicadas, além do problema sismológico [2,3], ao estudo da voz [4], processamento fotográfico [5,6], tratamento de sinais resultantes de electroencefalogramas e detecção de sinais imersos em ruído [7], etc. Surgiram, ainda, naturalmente, outros trabalhos de tipo mais teórico, sobre o cepstro e técnicas semelhantes [8,9], detecção de ecos em geral [6,10]. Estas indicações bibliográficas são aqui dadas apenas a título de referência para aprofundamento do assunto, tendo o presente estudo, dado o seu carácter, sido baseado apenas em [1] e [7].

Pretendeu-se apenas neste trabalho obter uma familiarização com as técnicas fundamentais relacionadas com o emprego do cepstro, e não desenvolver ou aprofundar qualquer análise ou técnica nova, o que não se justificaria no nosso estado de conhecimento do assunto. Dada essa finalidade usou-se, como metodologia fundamental, o tentar concretizar as situações apresentadas na comunicação referida [1]; existe, contudo, uma diferença importante entre as situações que procuramos analisar, e as que são tratadas nesse artigo: realmente, procurava-se, aí, simular sinais sísmicos, de características tipicamente transitórias, pelo que o sinal e o eco eram totalmente abrangidos pelas amostras usadas; pretendemos, porém, analisar a situação menos favorável, em que os sinais tem características estacionárias no tempo, e só se dispõe de amostras de extensão limitada, as quais conterão portanto no início uma porção de eco que não corresponde a nenhuma zona amostrada do sinal, e no final uma porção de sinal cujo eco já não está incluido na amostra; por este motivo a técnica de «tapering» foi por nós utilizada com uma finalidade diferente da que lhe é dada nesse artigo, a qual consiste fundamentalmente em criar uma série artificial com caracteristicas semelhantes às dos sinais sísmicos.

No primeiro parágrafo do presente trabalho apresenta-se um estudo elementar dos fundamentos em que se baseia o cepstro.

No segundo e terceiro parágrafo apresentam-se resultados obtidos a partir de séries no tempo com ecos produzidos digitalmente; no terceiro parágrafo inicia-se ainda a discussão de um problema surgido a propósito do tratamento de sinais de banda estreita, e que irá implicar um tratamento prévio (tapering) do sinal.

No quarto parágrafo estuda-se o comportamento do cepstro com a variação do atraso do eco; a propósito desta questão discute-se no parágrafo cinco, com um pouco mais de rigor o uso do tapering.

O problema dos ecos múltiplos é em seguida tratado no parágrafo seis; o parágrafo sete analisa o comportamento do cepstro face a ecos que difiram do sinal, e o cepstro de sinais periódicos é estudado no parágrafo oito.

Finalmente, no parágrafo nove apresentam-se resultados obtidos, não agora a partir da simulações digitais, mas sim a partir de sinais reais com eco.

Ao terminar esta introdução, queremos chamar a atenção para o facto de que o que em [1] é chamado cepstro ser o quadrado de função que aqui utilizámos, e à qual chamámos também cepstro, dada a estreita relação existente entre ambas; a razão pela qual decidimos usar esta função e não o seu quadrado residiu fundamentalmente em que esta permite também utilizar a informação contida no sinal algébrico dos picos obtidos; uma outra vantagem desta função encontrar-se-á na interpretação dos resultados obtidos com ecos diferentes do sinal (parágrafo sete).

1 — FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Apresenta-se nesta secção uma brevíssima exposição das bases teóricas elementares do cepstro.

Suponhamos um sinal $x(t)$ a que se sobrepõe um eco $y(t) = \alpha\, x(t-t_o)$ e seja $z(t)$ o resultado.

$$z(t) = x(t) + \alpha\, x(t-t_o) \qquad (1)$$

Sendo $X(\omega)$ a transformada de Fourier de $x(t)$, e $Z(\omega)$ a de $z(t)$, será

$$Z(\omega) = X(\omega)\ (1 + \alpha\, \varepsilon^{-i\omega t_o}) \qquad (2)$$

Para α pequeno, calculando $\log |Z(\omega)|$, obtemos

$$\log |Z(\omega)| \simeq \log |X(\omega)| + \alpha \cos\omega t_o \qquad (3)$$

cuja transformada inversa é

$$F^{-1}\left[\log |Z(\omega)|\right] = F^{-1}\left[\log |X(\omega)|\right] + \frac{\alpha}{2}\,\delta(\tau + t_o) + \frac{\alpha}{2}\,\delta(\tau - t_o) \qquad (4)$$

o que mostra que se $F^{-1}\left[\log |X(\omega)|\right]$ for de pequena amplitude ou pouco acidentada em torno de $\tau \pm t_o$, será facilmente notada a presença de picos nos pontos $\tau = t_o$ e $\tau = -t_o$, o que pode ser um método eficaz na detecção de ecos em sinais.

À função $F^{-1}\left[\log \varnothing(\omega)\right]$ em que $\varnothing(\omega)$ é o espectro de energia de $z(t)$,

$$\varnothing(\omega) = |Z(\omega)|^2 \qquad (5)$$

Bogert, Healy e Tukey [1] deram o nome de cepstro. Usaremos aqui, a expressão $F^{-1}\left[\log |Z(\omega)|\right]$ dado que foi a que realmente utilizámos no cálculo, como adiante se explicará, e, ainda, por permitir simplificar um pouco a análise que se segue.

Uma análise mais exacta do problema poderá obter-se, por meio do desenvolvimento, em série de potências, de $\log(1 + z)$ (com z complexo):

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_n}{n} \quad \text{para } |z| < 1 \qquad (6)$$

A parte real deste desenvolvimento será o $\log |1 + z|$, pelo que

$$\log |1 + z| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathrm{Re}\ (z^n)}{n} \qquad (7)$$

para $|z| < 1$

e podemos, pois, escrever, para $|\alpha| < 1$.

$$\log |Z(\omega)| = \log |X(\omega)| +$$

técnica

NÚMERO 424 MARÇO DE 1975 ANO L VOLUME XXXVI PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 621.3:517.512.2

Estudo experimental da aplicação do cepstro (1) à detecção de ecos e periodicidades em sinais

LUIS HENRIQUE MARTINS BORGES DE ALMEIDA
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Bolseiro do Lab. de Análise de Sinais (C. I.) do I. A. C.
GUILHERME DINIZ MORENO DA SILVA ARROZ
Engenheiro Electrotécnico (I. S. T.)
Bolseiro do Lab. de Análise de Sinais (C. I.) do I. A. C.

RESUMO

Este artigo, que constituiu relatório de um estágio, realizado no Centro de Estudos de Electrónica, passa rapidamente em revista a técnica do Cepstro, pondo em relevo a sua utilidade na detecção de ecos e periodicidades, e na demarcação, com precisão, da época da sua ocorrência. Além de uma breve análise teórica da técnica utilizada, apresentam-se algumas simulações em computador e também alguns casos reais.

SYNOPSIS

This paper, wich is a trainee report of a work done in the Centro de Estudos de Electrónica, shortly describes, with examples, the Cepstrum technique outlining its usefullness in the deteccion of echoes and periodicities, and in defining the exact epoch they occur in. Apart from a brief theoretical analysis of the technique, some simulations in a computer and some real examples are treated.

0 — INTRODUÇÃO

Surgem com frequência, em trabalhos de análise de sinais, casos em que se torna necessária a detecção de periodicidades um pouco escondidas na complexidade do sinal, quando este é de origem experimental, detecção de ecos, mesmo quando estes diferem de algum modo do sinal primitivo, indentificação da presença e da localização de sinais de forma mais ou menos conhecida imersos em ruído, etc. Este tipo de problemas encontra-se nos mais diversos ramos do desenvolvimento científico, como sejam as telecomunicações, a acústica, a sismologia e a cristalografia.

A ferramenta matemática tradicional usada para tratar este tipo de questões, quando o sinal é suficientemente complexo para que uma análise mais ou menos empírica não permita tirar as conclusões desejadas, é a correlação, quer do sinal consigo mesmo, quer de dois sinais diferentes. Este método revela-se, como se verá resumidamente na sequência, perfeitamente apropriado em certos casos, principalmente quando se trata da análise de sinais de banda larga, mas começa a falhar quando, sendo a banda mais estreita, a precisão pretendida na determinação da localização dos sinais a detectar é da ordem de grandeza do intervalo de tempo em que a autocorrelação do sinal toma valores apreciáveis.

Num simpósio realizado em 1962 na Universidade de Brown, Providence, Rhode Island, sobre o tema «Análise de Séries no Tempo», foi apresentada, por R. P. Bogert, M. J. Healy e J. W. Tukey, uma comunicação intitulada «The Quefrency Alanysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-Cepstrum and Saphe Cracking» [1] no qual os autores introduzem, entre outras, a técnica do «cepstrum» (que traduziremos por cepstro), a qual concluem ser apropriada para o tratamento do problema que tinham em vista (detecção de ecos em sinais sísmicos), pelo menos nos casos simulados que experimentaram.

(1) Deve pronunciar-se «Képstro».

Posteriormente surgiram vários outros trabalhos, em que esta técnica ou outras semelhantes são aplicadas, além do problema sismológico [2,3], ao estudo da voz [4], processamento fotográfico [5,6], tratamento de sinais resultantes de electroencefalogramas e detecção de sinais imersos em ruído [7], etc. Surgiram, ainda, naturalmente, outros trabalhos de tipo mais teórico, sobre o cepstro e técnicas semelhantes [8,9], detecção de ecos em geral [6,10]. Estas indicações bibliográficas são aqui dadas apenas a título de referência para aprofundamento do assunto, tendo o presente estudo, dado o seu carácter, sido baseado apenas em [1] e [7].

Pretendeu-se apenas neste trabalho obter uma familiarização com as técnicas fundamentais relacionadas com o emprego do cepstro, e não desenvolver ou aprofundar qualquer análise ou técnica nova, o que não se justificaria no nosso estado de conhecimento do assunto. Dada essa finalidade usou-se, como metodologia fundamental, o tentar concretizar as situações apresentadas na comunicação referida [1]; existe, contudo, uma diferença importante entre as situações que procuramos analisar, e as que são tratadas nesse artigo: realmente, procurava-se, aí, simular sinais sísmicos, de características tipicamente transitórias, pelo que o sinal e o eco eram totalmente abrangidos pelas amostras usadas; pretendemos, porém, analisar a situação menos favorável, em que os sinais tem características estacionárias no tempo, e só se dispõe de amostras de extensão limitada, as quais conterão portanto no início uma porção de eco que não corresponde a nenhuma zona amostrada do sinal, e no final uma porção de sinal cujo eco já não está incluido na amostra; por este motivo a técnica de «tapering» foi por nós utilizada com uma finalidade diferente da que lhe é dada nesse artigo, a qual consiste fundamentalmente em criar uma série artificial com características semelhantes às dos sinais sísmicos.

No primeiro parágrafo do presente trabalho apresenta-se um estudo elementar dos fundamentos em que se baseia o cepstro.

No segundo e terceiro parágrafo apresentam-se resultados obtidos a partir de séries no tempo com ecos produzidos digitalmente; no terceiro parágrafo inicia-se ainda a discussão de um problema surgido a propósito do tratamento de sinais de banda estreita, e que irá implicar um tratamento prévio (tapering) do sinal.

No quarto parágrafo estuda-se o comportamento do cepstro com a variação do atraso do eco; a propósito desta questão discute-se no parágrafo cinco, com um pouco mais de rigor o uso do tapering.

O problema dos ecos múltiplos é em seguida tratado no parágrafo seis; o parágrafo sete analisa o comportamento do cepstro face a ecos que difiram do sinal, e o cepstro de sinais periódicos é estudado no parágrafo oito.

Finalmente, no parágrafo nove apresentam-se resultados obtidos, não agora a partir da simulações digitais, mas sim a partir de sinais reais com eco.

Ao terminar esta introdução, queremos chamar a atenção para o facto de que o que em [1] é chamado cepstro ser o quadrado de função que aqui utilizámos, e à qual chamámos também cepstro, dada a estreita relação existente entre ambas; a razão pela qual decidimos usar esta função e não o seu quadrado residiu fundamentalmente em que esta permite também utilizar a informação contida no sinal algébrico dos picos obtidos; uma outra vantagem desta função encontrar-se-á na interpretação dos resultados obtidos com ecos diferentes do sinal (parágrafo sete).

1 — FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Apresenta-se nesta secção uma brevíssima exposição das bases teóricas elementares do cepstro.

Suponhamos um sinal $x(t)$ a que se sobrepõe um eco $y(t) = \alpha\, x(t-t_o)$ e seja $z(t)$ o resultado.

$$z(t) = x(t) + \alpha\, x(t-t_o) \qquad (1)$$

Sendo $X(\omega)$ a transformada de Fourier de $x(t)$, e $Z(\omega)$ a de $z(t)$, será

$$Z(\omega) = X(\omega)\ (1 + \alpha\, \varepsilon^{-j\omega t_o}) \qquad (2)$$

Para α pequeno, calculando $\log |Z(\omega)|$, obtemos

$$\log |Z(\omega)| \simeq \log |X(\omega)| + \alpha \cos\omega t_o \qquad (3)$$

cuja transformada inversa é

$$F^{-1}\left[\log |Z(\omega)|\right] = F^{-1}\left[\log |X(\omega)|\right] + \frac{\alpha}{2}\,\delta(\tau + t_o) + \frac{\alpha}{2}\,\delta(\tau - t_o) \qquad (4)$$

o que mostra que se $F^{-1}\left[\log |X(\omega)|\right]$ for de pequena amplitude ou pouco acidentada em torno de $\tau \pm t_o$, será facilmente notada a presença de picos nos pontos $\tau = t_o$ e $\tau = -t_o$, o que pode ser um método eficaz na detecção de ecos em sinais.

A função $F^{-1}\left[\log \varnothing(\omega)\right]$ em que $\varnothing(\omega)$ é o espectro de energia de $z(t)$,

$$\varnothing(\omega) = |Z(\omega)|^2 \qquad (5)$$

Bogert, Healy e Tukey [1] deram o nome de cepstro. Usaremos aqui, a expressão $F^{-1}\left[\log |Z(\omega)|\right]$ dado que foi a que realmente utilizámos no cálculo, como adiante se explicará, e, ainda, por permitir simplificar um pouco a análise que se segue.

Uma análise mais exacta do problema poderá obter-se, por meio do desenvolvimento, em série de potências, de $\log(1 + z)$ (com z complexo):

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_n}{n} \quad \text{para } |z| < 1 \qquad (6)$$

A parte real deste desenvolvimento será o $\log |1 + z|$, pelo que

$$\log |1 + z| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\mathrm{Re}\ (z^n)}{n} \qquad (7)$$

para $|z| < 1$

e podemos, pois, escrever, para $|\alpha| < 1$.

$$\log |Z(\omega)| = \log |X(\omega)| +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha^n \cos n\omega t_o}{n}$$

o que leva à conclusão de que, à parte a forma de $F^{-1}[\log|X(\omega)|]$ se observarão no cepstro picos de Dirac, de momentos proporcionais a $(-1)^{n-1} \frac{\alpha^n}{n}$, nos pontos da forma $\tau = nt_o$ (1), isto, é, aparecerão «harmónicas» no tempo, derivadas do facto de se ter introduzido uma não linearidade, ao calcular o logaritmo do módulo. Evidentemente, para $|\alpha| > 1$, poderão inverter-se os papéis do sinal e do eco, chegando-se a conclusões idênticas, com α substituindo por $\frac{1}{\alpha}$. O caso $|\alpha| = 1$ apresenta dificuldades de tipo matemático, visto que $Z(\omega)$ se anulará em certos pontos; na prática, porém, caso os cálculos sejam feitos em computador, isto irá apenas dar origem a um «overflow» negativo no cálculo do logaritmo, e a função obtida assemelhar-se-á bastante, nas suas propriedades, a um cepstro em que $|\alpha|$ fosse ligeiramente inferior a 1; este caso não difere, assim, dos casos em que, com $|\alpha|$ muito próximo de 1, se obtêm já «overflows» no cálculo do logaritmo.

Vemos assim que, trabalhando com $\log|Z(\omega)|$, conseguimos com facilidade chegar à expressão geral dos picos do cepstro, para qualquer amplitude do eco, ao contrário do que acontece em [7].

Como se verá nos resultados experimentais adiante apresentados, os picos correspondentes a harmónicas ficam normalmente dissimulados nas variações aleatórias correspondentes a $F^{-1}[\log|X(\omega)|]$.

Método de Cálculo do Cepstro

Os cálculos foram feitos num analisador de Fourier HP5452A que é basicamente constituido por um computador digital HP2116C que efectua todo o processamento da informação, ao qual estão associados orgãos periféricos que permitem a sua aplicação à análise de Fourier de sinais analógicos (conversor analógico - digital, unidade de display e plotter).

O cálculo do cepstro fez-se do modo atrás indicado, com as transformadas de Fourier directa e inversa substituidas pelas FFT (Fast Fourier Transform) correspondentes. O uso de $|Z(\omega)|$ em vez de $|Z(\omega)|^2$ permitiu aqui evitar os erros de quantificação produzidos quando do cálculo do quadrado, os quais eram apreciáveis para valores pequenos de $|Z(\omega)|$.

No cálculo do logaritmo, para obter maior precisão são ajustados todos os valores mediante a sbtracção de um valor igual para todos eles, o qual permite trazê-los para próximo do valor zero.

Isto tem como consequência a introdução de uma componente contínua no logaritmo do módulo do espectro, que vai alterar o valor do cepstro no ponto $\tau = 0$.

Como este valor está relacionado sobretudo com a amplitude do sinal analisado, e não com a relação sinal-eco, considerou-se vantajoso aumentar a precisão do cepstro à custa de erros neste valor.

Nos casos apresentados nos parágrafos dois a seis o eco foi fabricado a partir do sinal já digitalizado, no próprio computador, do seguinte modo:

Usaram-se amostras formadas por 1024 pontos. O eco obteve-se deslocando a amostra um número de pontos correspondentes ao atraso pretendido, dividindo em seguida por 2 e somando à amostra original. Seguidamente igualaram-se a zero os primeiros 512 pontos, com o fim de simular uma amostra real em que, no princípio aparece um eco de uma parte do sinal que não foi amostrada, e o eco da parte final do sinal não cai também nos domínios da amostra (fig. 1).

O sinal analisado era constituido pela saída de um gerador de ruido branco, convenientemente filtrado nos casos indicados no texto.

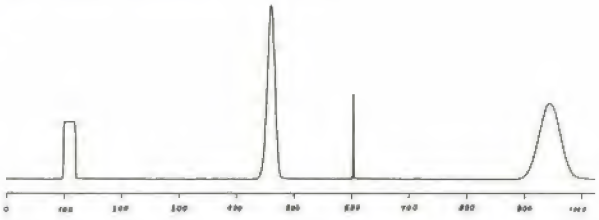


Fig. 1-A: Formação de um sinal com eco: sinal original

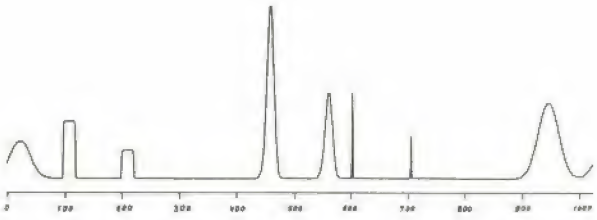


Fig. 1-B: Formação de um sinal com eco: sinal com o eco sobreposto; notar que o deslocamento consistiu numa permutação cíclica dos pontos

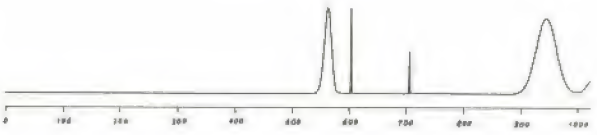


Fig. 1-C: Formação de um sinal com eco: parte que é aproveitada

(1) Dado que o cepstro é uma função par, passaremos a considerar apenas a parte correspondente a valores de τ não negativos.

2 — ANÁLISE DO RUIDO BRANCO COM ECO SIMPLES

Na fig. 2 apresenta-se o cepstro de um ruido branco cuja frequência limite era muito superior à frequência de amostragem utilizada, com um eco deslocado de 102 pontos.

Na fig. 3 apresenta-se a autocorrelação do mesmo sinal, onde o pico representativo do eco é também bem visível.

Verifica-se que neste caso simples, tanto a corelação como o cepstro permitem detectar com facilidade a presença do eco.

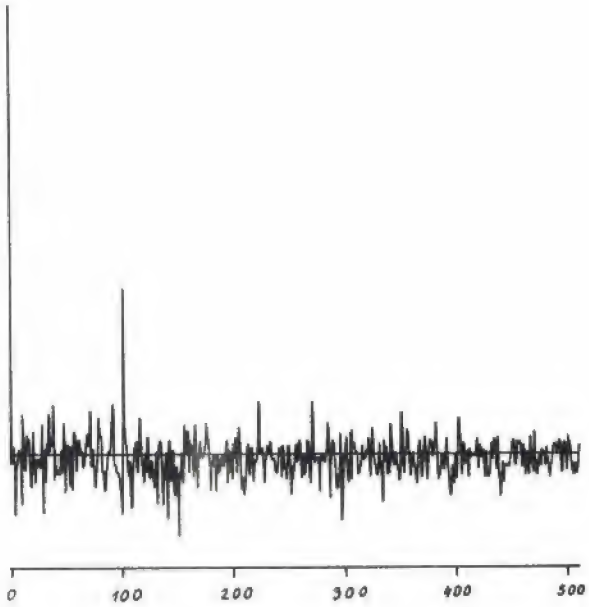


Fig. 2 — Cepstro de ruido branco com eco. (102)= 0,169

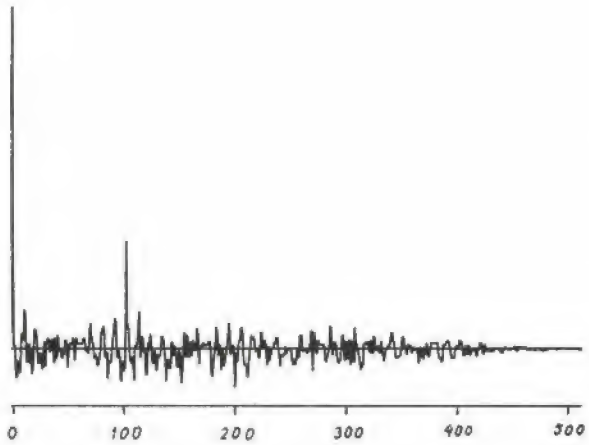


Fig. 3 — Autocorrelação de ruido branco com eco (102) = 0,308

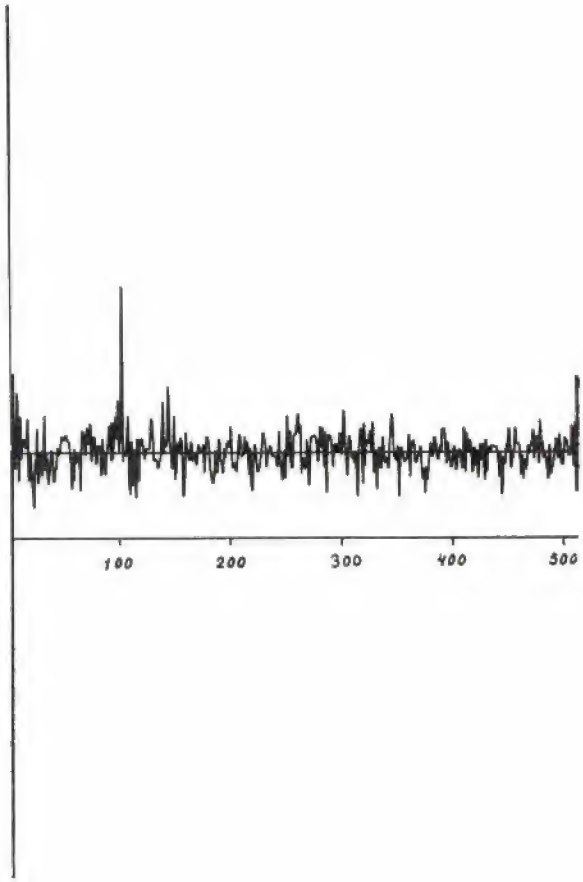


Fig. 4 — Cepstro de ruido vermelho com eco. (102) = 0,175

3 — RUIDO DE COR COM ECO SIMPLES

As fig. 4 e 5 referem-se a uma situação idêntica à anterior com uma única modificação: o sinal, antes de amostrado foi passado por um filtro Butterworth, passa-baixo, de frequência de corte igual a 1,5 KHz, sendo a frequência de amostragem de 5 KHz.

O espectro de potência, médio [1], do ruido, determinado experimentalmente, apresenta-se na fig. 6.

Ainda neste caso é perfeitamente visível o pico do eco, quer no cepstro, quer na autocorrelação.

O caso seguinte apresenta muito mais interesse. Trata-se da análise de um sinal de muito baixa frequência (ruido passado por um filtro RC de frequência de corte igual a 100 Hz, amostrado a 5 KHz).

A autocorrelação deste sinal sobreposto ao eco do modo habitual, não permite distinguir, com segurança, a presença do eco, e menos ainda, determinar o seu atraso com rigor. (fig. 7)

Na fig. 8 apresenta-se o cepstro da mesma função.

(1) Média de 1000 amostras

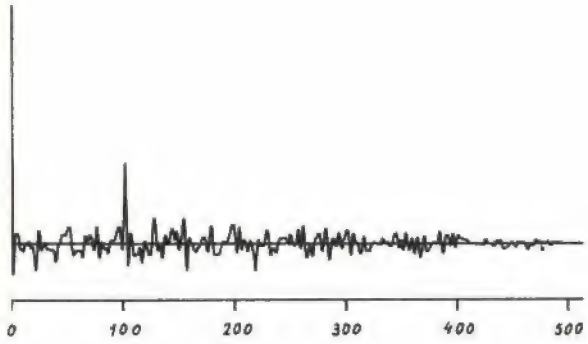


Fig. 5 — Autocorrelação de ruido vermelho com eco. (102) = 0,347

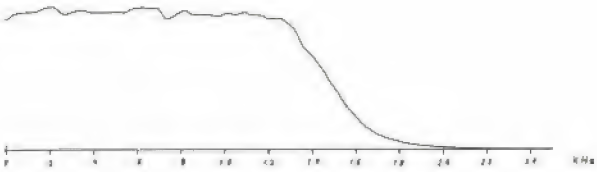


Fig. 6 — Espectro de potência experimental do ruido vermelho usado

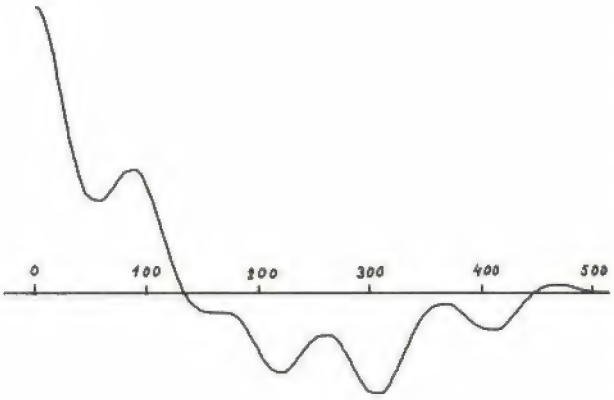


Fig. 7 — Autocorrelação de ruido de muito baixa frequência com eco

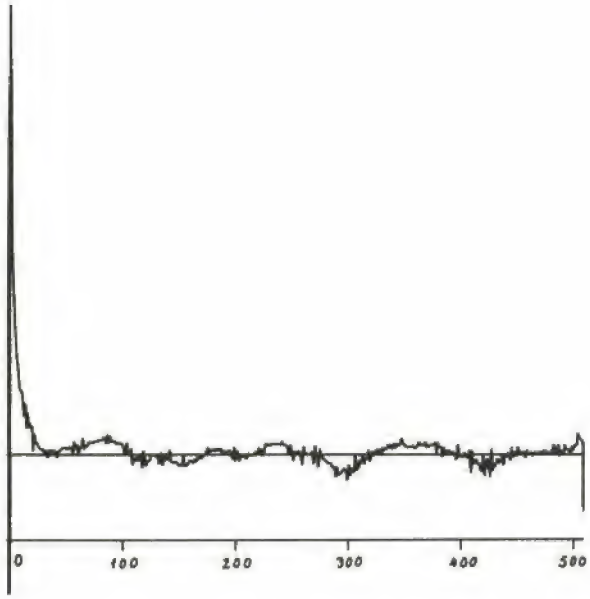


Fig. 8 — Cepstro de ruido de muito baixa frequência com eco; não se usou o «tapering»

Verifica-se imediatamente que nenhum pico é visível na zona do eco.

Convém, neste momento, abrir um parêntesis para descrever alguns ensaios que tinham sido feitos anteriormente, tendo em vista um primeiro contacto com a técnica do cepstro. Nessa primeira fase a obtenção do sinal com eco tinha sido diferente: o ruido (branco) foi obtido de uma tabela de números aleatórios gaussianos; por meio de uma filtragem digital, realizada no próximo computador, transformou-se o ruido branco em ruido de muito baixa frequência. (A função de transferência, em coordenadas logarítmicas, do filtro usado apresenta-se na fig. 9).

Para obter o eco deslocou-se, também, a amostra; mas neste caso, isso consistiu numa permutação cíclica dos pontos desta (1). Após isso dividiu-se a amostra por dois e somou-se à inicial. Isto teve com resultado que, no princípio da amostra figurasse o eco correspondente ao fim do sinal.

O cepstro e a correlação do sinal assim obtido mostram-se nas figuras 10 e 11. Pode-se ver que, neste caso, o pico é bem aparente no cepstro e não se nota na correlação. (2)

Isto levou-nos a suspeitar que a razão do desaparecimento do pico do cepstro era devida ao facto de o eco que figura na parte inicial da amostra, nada ter a ver com a porção do sinal que foi amostrada e não ter sido amostrado o eco da parte final do sinal.

(1) Como se sabe, a permutação cíclica corresponde nas transformadas de Fourier discretas ao atraso na transformada de Fourier normal.

(2) Um segundo pico que se nota na zona final do cepstro, resultou de uma característica da amostra, como se pôde verificar por estar também presente no cepstro do sinal sem eco.

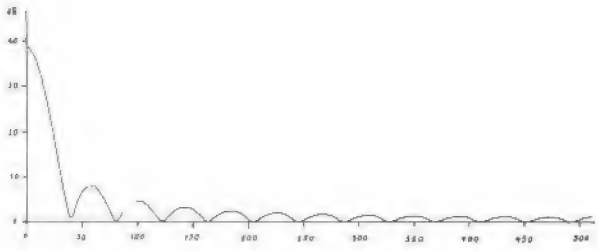


Fig. 9 — Logaritmo do módulo da função de transferência do filtro usado para gerar ruido de baixa frequência do computador

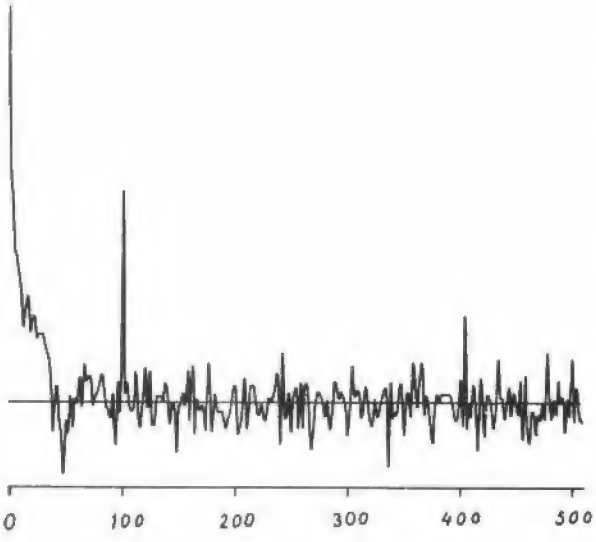


Fig. 10 — Cepstro de ruido de baixa frequência com eco constituido pela permutação cíclica dos seus pontos (102) = 0,270

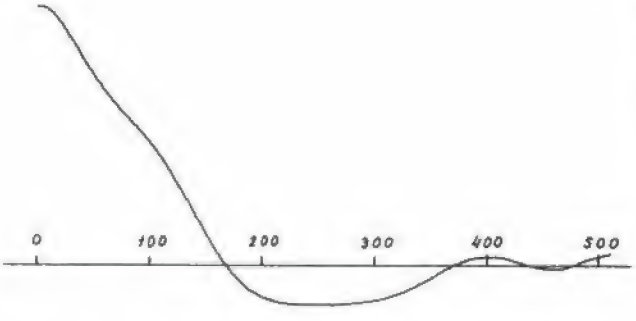


Fig. 11 — Autocorrelação de ruido de baixa frequência com eco constituido pela permutação cíclica dos seus pontos

Daí o ter-se encarado a hipótese de usar a técnica conhecida por «tapering», no tratamento da amostra.

Consiste esta técnica em minimizar a importância dos extremos da amostra multiplicando-a por uma função que vai crescendo lentamente no início da amostra, se mantém constante durante a maior parte dela e diminui lentamente para o fim. A função utilizada mostra-se na fig. 12.

Na fig. 13 está representado o cepstro da amostra depois de feito o tapering. O resultado põe bem em evidência a vantagem da utilização dessa técnica.

Verificou-se experimentalmente que o tapering não produz alteração sensível na autocorrelação (comparar as figs. 7 e 14).

Ver-se-á, no parágrafo 5, a propósito do influência do valor do atraso no cepstro, que a função principal desempenhada pelo tapering não é a aqui referida.

Os resultados obtidos neste parágrafo merecem uma análise mais aprofundada.

Como atrás se viu, o cepstro de um sinal com um eco é constituido basicamente por duas parcelas, uma das quais é um pico e a outra $F^{-1}\left[\log|X(\omega)|\right]$.

No caso do sinal ser constituido por ruido branco filtrado, então

$$|X(\omega)| \approx N_0 |H(\omega)| \qquad (9)$$

em que N_0 é o valor médio do módulo do espectro do ruido.

Na fig. 15 está representado $\log|H(\omega)|$, determinado experimentalmente (1), e na fig. 16 representa-se a sua transformada inversa.

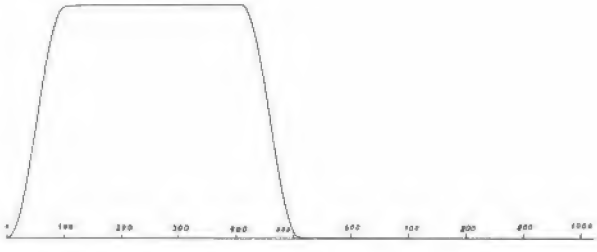


Fig. 12 — Função usada para efectuar o «tapering»

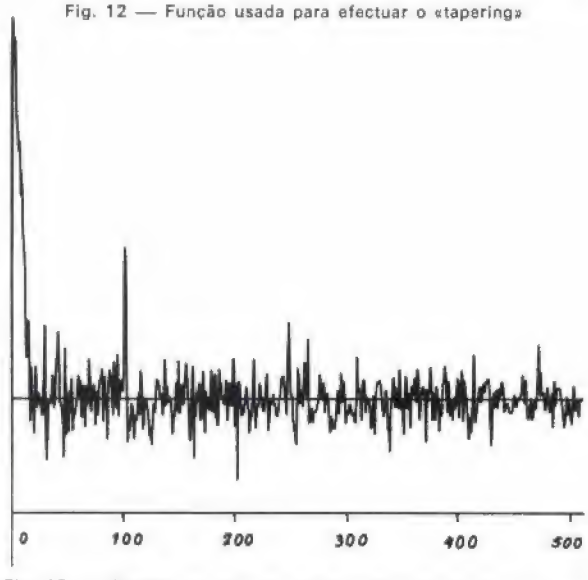


Fig. 13 — Cepstro de ruido de muito baixa frequência com eco; usou-se o «tapering» (102) = 0,148

(1) As oscilações notadas para os valores mais baixos desta função resultam da quantificação que foi feita já em $|X(\omega)|$

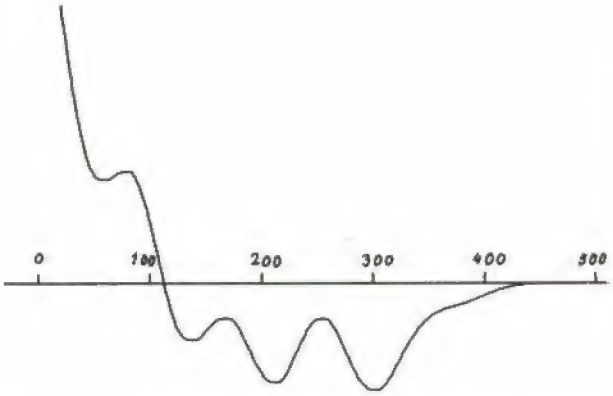


Fig. 14 — Autocorelação de ruido de muito baixa frequência com eco; usou-se o «tapering»

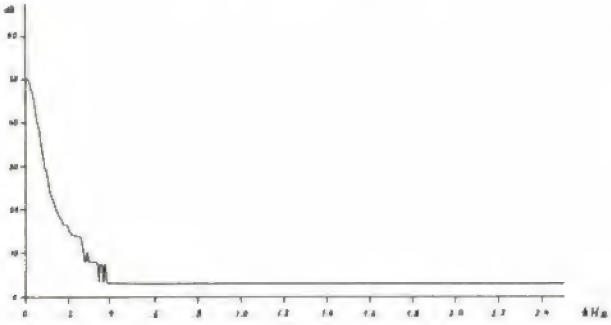


Fig. 15 — Logaritmo do espectro de potência experimental do ruido de muito baixa frequência usado

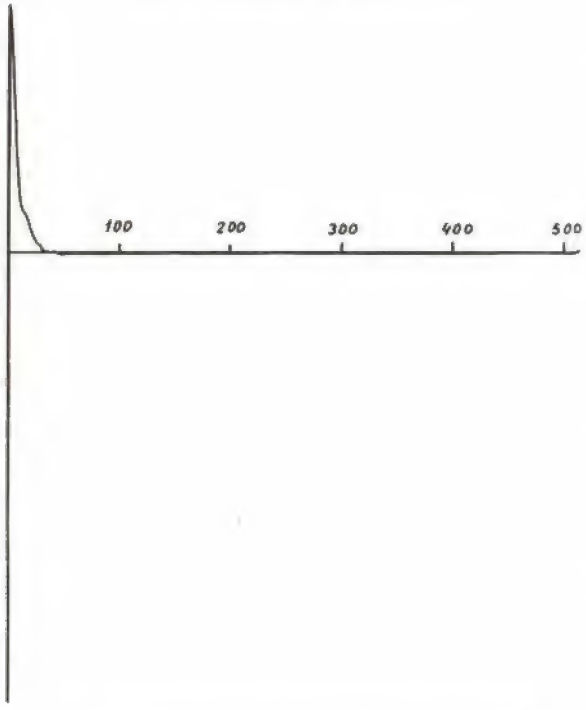


Fig. 16 — Transformada inversa da função da fig. 15

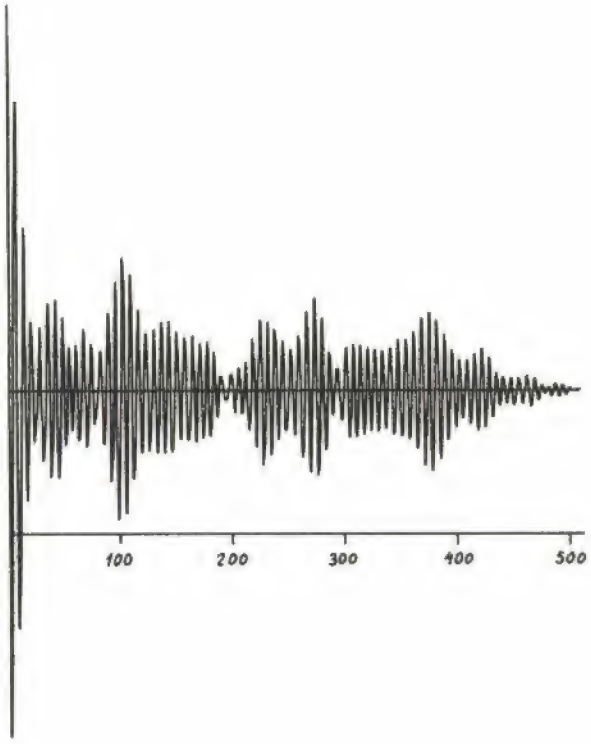


Fig. 17 — Autocorrelação de ruido de banda estreita com eco

A forma desta transformada aparece claramente junto à origem nas fig. 8 e 13, como era de esperar.

Nas fig. 17 a 20 mostram-se resultados idênticos obtidos agora com um filtro passa-banda.

Uma análise do tipo da anterior aplicada à correlação mostra imediatamente que esta é a convolução da auto-correlação da resposta do filtro a um impulso de Dirac com a autocorrelação do ruido branco com eco.

Sendo o filtro de banda estreita, a autocorrelação da resposta é bastante extensa no tempo, o que vai originar na convolução um alargamento do pico correspondente ao eco, o que no primeiro caso apresentado, o mascara quase totalmente. No segudo caso o pico aparece ainda visível mas já a sua localização é bastante imprecisa.

Esta parece uma das vantagens principais do cepstro sobre a autocorrelação.

Nas fig. 21 e 22 mostram-se para comparação as autocorrelações das respostas dos dois filtros, determinadas experimentalmente

Em [1], no caso de sinais de cor, o logaritmo do espectro de potência é filtrado, retirando-se-lhe as variações lentas na frequência. Isto corresponde apenas a multiplicar o cepstro pela «função de transferência»* do filtro usado, e portanto a diminuir a amplitude das variações existentes em torno da origem. Não nos parece ser esta técnica de grande utilidade, pelo que decidimos pô-la de parte.

* Ou o quadrado dessa função

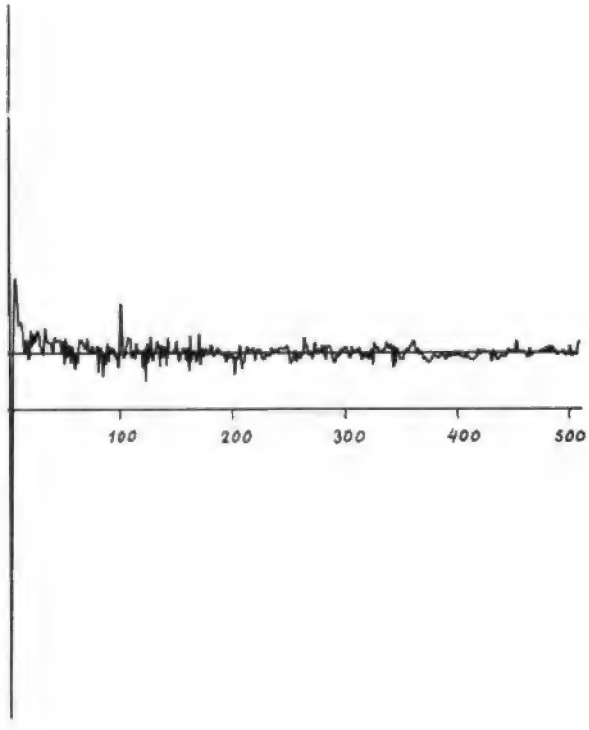


Fig. 18 — Cepstro de ruido de banda estreita com eco. (102) = 0,134

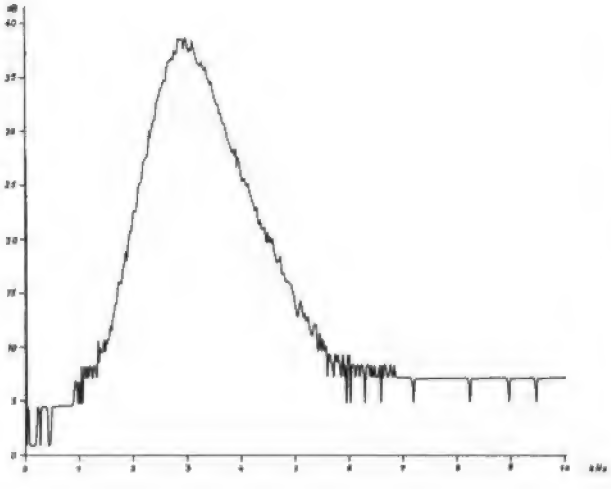


Fig. 19 — Logaritmo do espectro de potência experimental do ruido de banda estreita usado

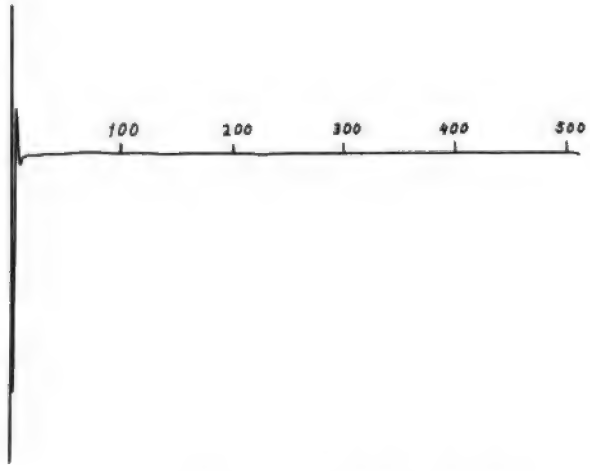


Fig. 20 — Transformada inversa da função da fig. 19

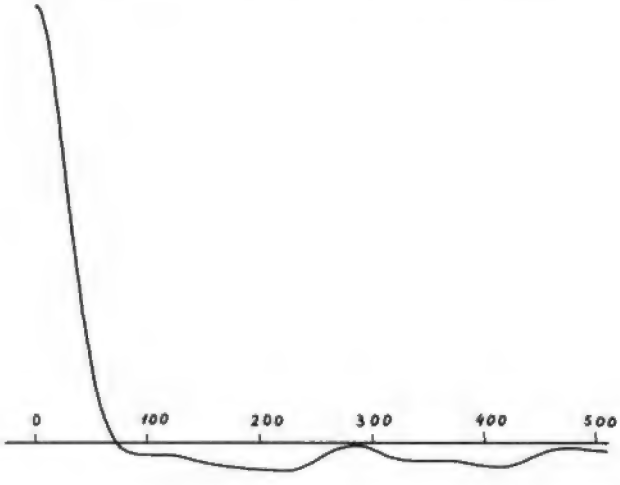


Fig. 21 — Autocorrelação do ruido de muito baixa frequência a que se referem as figs. 7, 8, 13, 14 e 15

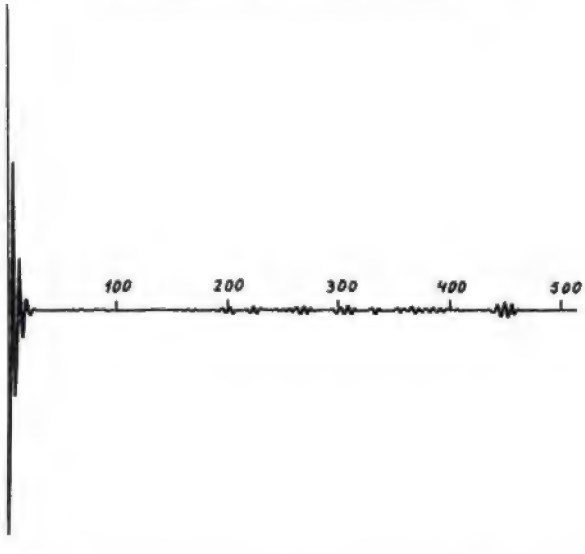


Fig. 22 — Autocorrelação do ruido de banda estreita a que se referem as figs. 17, 18, 19 e 20

4 — INFLUÊNCIA DO VALOR DO ATRASO NO CEPSTRO DUM SINAL COM ECO SIMPLES

Ao descrever o modo como obtivemos as amostras do sinal com eco, chamámos a atenção para o facto de a amostra conter, no principio, um troço de eco cujo sinal não foi amostrado e, no fim, um troço de sinal cujo eco não figura também na amostra.

Matendo o tamanho da amostra, este efeito será tanto mais sensível quanto maior for o atraso do eco, o que significa que no cepstro o pico correspondente decrescerá com o aumento do atraso.

Evidentemente tal facto implica ficar o atraso máximo detectável dependente do tamanho da amostra usada, além de ser dependente da amplitude do eco em relação ao sinal, como é óbvio. Na fig. 23 mostra-se

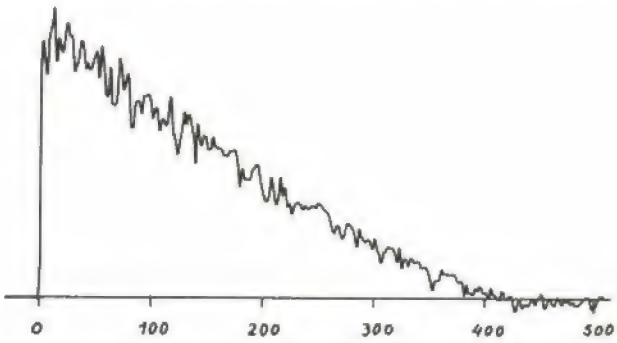


Fig. 23 — Variação da amplitude do pico no cepstro em função do atraso do eco, determinada experimentalmente

a média experimental, para cinco amostras de ruido branco, do valor do pico em função do atraso, com amostras de 256 pontos e o tapering atrás indicado.

Como exemplo deste facto temos as figs. 24 e 25

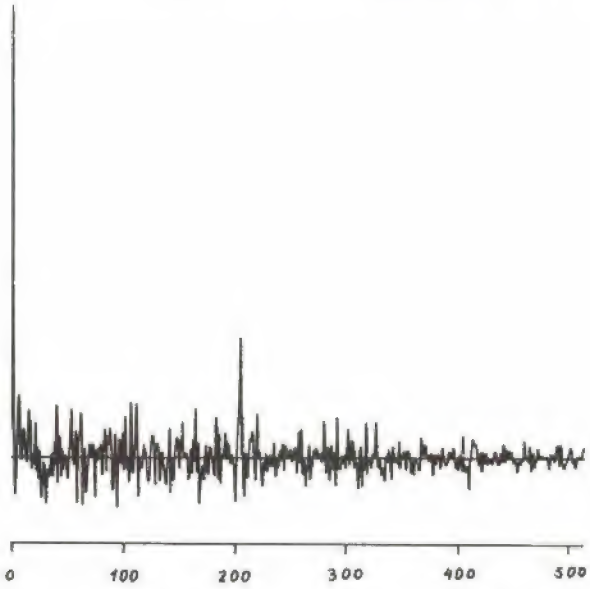


Fig. 24 — Cepstro de ruido branco com eco atrasado de 204 pontos. (204) = 0,118

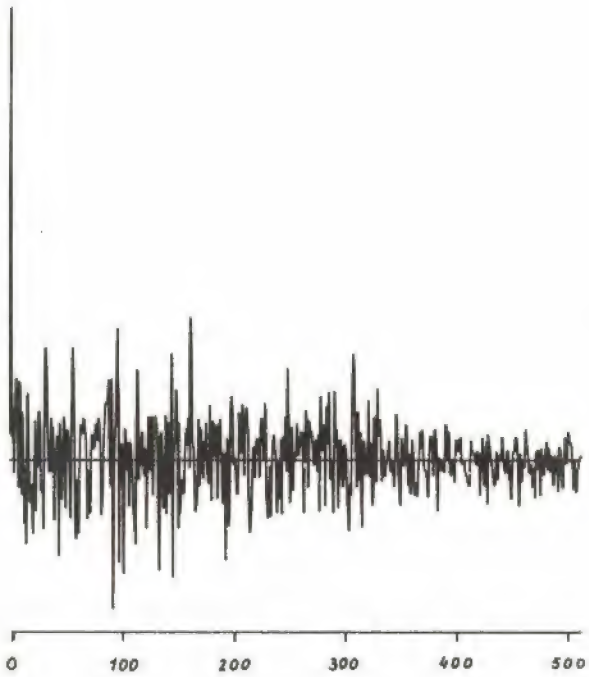


Fig. 25 — Cepstro de ruido branco com eco atrasado de 307 pontos. (307) = 0,015

que representam cepstros de sinais com ecos atrasados respectivamente de 205 e 307 pontos, e cuja amplitude continua a ser metade da do sinal.

Como se verifica na fig. 25 o pico representativo do eco tem amplitude menor que vários picos aleatórios que surgem no cepstro.

5 — TAPERING

A função que foi atrás utilizada para fazer o tapering, foi escolhida de acordo com o raciocínio na altura indicado, de modo que o seu crescimento se efectuasse num espaço igual ao atraso do eco.

Dessa forma seria natural utilizar-se com ecos de atraso maior, uma função de tapering com crescimento mais lento. Isso foi experimentado mas os resultados não corresponderam ao que se previa, o que levou a rever as razões que, primitivamente tinham sido consideradas para justificar a utilidade do tapering.

Analisando a questão um pouco mais a fundo, verificou-se que uma das razões para que o cepstro sem tapering não detectasse ecos em sinais de banda estreita residia no facto de a amostra apresentar descontinuidades no começo e no fim, as quais davam origem a valores elevados do espectro de frequências que quase não existem no sinal original.

Isso pode compreender-se facilmente se pensarmos que o espectro da amostra, quando esta é cortada (multiplicada por uma função rectangular), vai sofrer uma convolução com uma função do tipo.

$$\frac{\operatorname{sen} \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}}$$

em que T é a duração da parte aproveitada da amostra

Num sinal de banda estreita a maior parte do espectro ficará, pois, ocupada por valores parasitas mascarando as oscilações que existissem devido ao eco e dando origem no cepstro a um pico para $\tau = T$.

Na fig. 26 temos uma amostra de ruído de baixa frequência com um eco atrasado de 102 pontos; a fig. 27 mostra o seu espectro em coordenadas logarítmicas; é perfeitamente nítido o efeito que atrás explicámos, na zona em que o espectro do sinal tem valores muito baixos (notar que, sendo o comprimento do rectângulo de 512 pontos, o seu espectro discreto apresenta valores alternadamente positivos e negativos em pontos adjacentes). Na fig. 28 pode observar-se o pico no último ponto do cepstro (o número 512). As figuras 29, 30 e 31 foram obtidas do mesmo sinal, depois

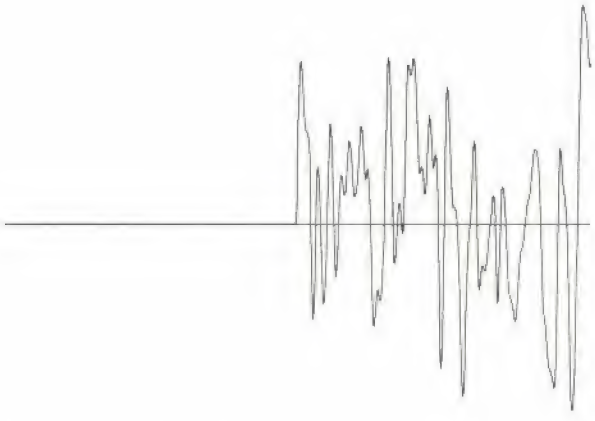


Fig. 26 — Amostra de ruído de baixa frequência com eco

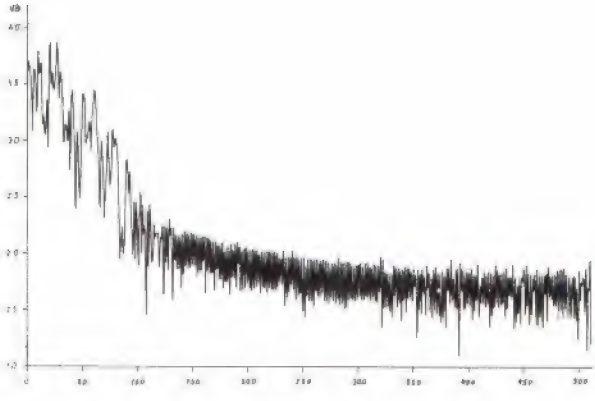


Fig. 27 — Logaritmo do módulo do espectro da amostra da fig. 26

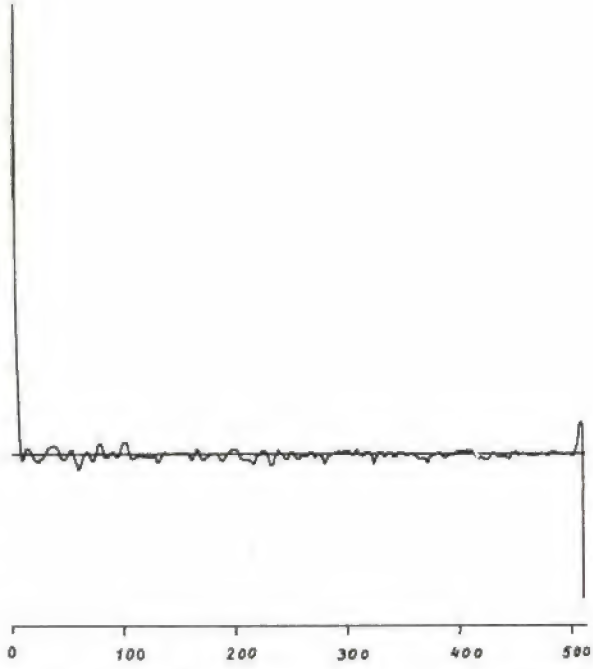


Fig. 28 — Cepstro da amostra da fig. 26 sem «tapering»

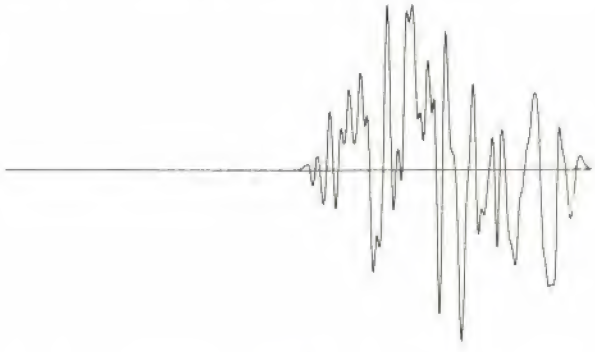


Fig. 29 — Resultado da aplicação do «tapering» à amostra da fig. 26

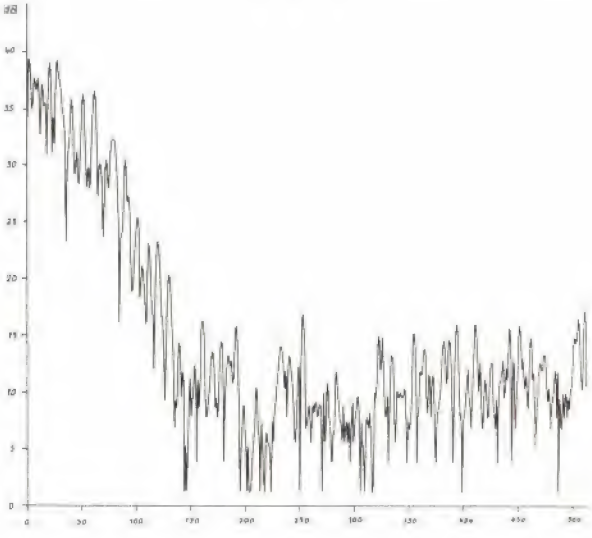


Fig. 30 — Logaritmo do módulo do espectro da função da fig. 29

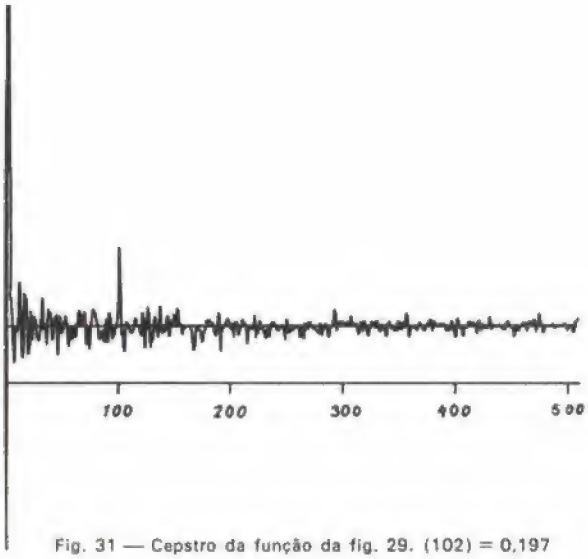


Fig. 31 — Cepstro da função da fig. 29. (102) = 0,197

de feito o tapering com a função atrás indicada, e a sua comparação com as anteriores não oferece dificuldades; chama-se apenas a atenção para o facto de se observarem agora também nos valores baixos do espectro as oscilações correspondentes à presença de um eco.

Assim sendo, a utilidade do tapering consistiria em eliminar as descontinuidades da função nos extremos.

Sob este ponto de vista a função que melhor se adaptaria ao tapering seria uma função (limitada no tempo) cujo espectro se anulasse o mais depressa possível fora de uma banda estreita de frequências.

Estes requisitos são exactamente os que se exigem na construção de janelas para cálculos de espectros de potência o que leva a admitir que seria lógico usar uma janela do tipo da de Parzen. Os resultados obtidos com esta não foram, porém, tão satisfatórios como os fornecidos pela função atrás indicada, não se tendo ainda encontrado explicação viável para o facto.

6 — ECOS MÚLTIPLOS

Suponhamos um sinal a que se adicionam dois ecos de amplitudes relativas α_1 e α_2 e atrasos t_1 e t_2 respectivamente.

Teremos agora, para $|\alpha_1 \varepsilon^{-j\omega t_1} + \alpha_2 \varepsilon^{-j\omega t_2}| < 1$ ou seja, para $|\alpha_1| + |\alpha_2| < 1$

$$\log |Z(\omega)| = \log |X(\omega)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times$$

$$\times \operatorname{Re}\left\{ (\alpha_1 \varepsilon^{-j\omega t_1} + \alpha_2 \varepsilon^{-j\omega t_2})^n \right\} \qquad (10)$$

$$= \log |X(\omega)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{i} \alpha_1^{n-i} \times \right.$$

$$\left. \times \alpha_2^{i} \cos \omega \left[n t_1 + i (t_2 - t_1) \right] \right\} \qquad (11)$$

série esta que continua convergente se dissociarmos o somatório em i nas suas várias parcelas.

Esta série, depois de dissociado esse somatório, pode ser interpretada como resultado de uma transformação de Fourier, aplicada a uma função do tempo constituida por impulsos de Dirac. A transformada inversa da série é, pois, essa função.

Assim sendo, vemos que o cepstro apresentará picos nos valores de τ da forma $nt_1 + i\ (t_2 - t_1)$ com n natural e i inteiro de 0 a n, ou seja, para todas as combinações inteiras de t_1 e t_2, picos esses cujos momentos serão proporcionais a

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{i} \alpha_1^{n-i}\ \alpha_2^{i}$$

Os picos principais correspondentes a $n = 1$, obtêm-se, como seria de esperar, para $\tau = t_1$ e $\tau = t_2$, e as suas amplitudes são proporcionais a α_1 e α_2, respectivamente.

De notar que, para mais de dois ecos, a condição $\sum_i |\alpha_i| < 1$ é condição suficiente, mas nem sempre necessária, para que o desenvolvimento do logaritmo seja válido, isto é, para que $|\sum \alpha_i \varepsilon^{-j\omega t_i}| < 1, \forall \omega$. Isto verificar-se-á, porém, só em casos em que os α_i não tenham todos o mesmo sinal.

Caso o desenvolvimento em série não seja válido para todos os valores de ω, e não seja possível, trocando os papéis de um dos ecos com os do sinal, restabelecer essa validade, a localização dos picos é, ainda, determinávvel se t_1 e t_2 forem comensuráveis.

Realmente $\log |1 + \alpha_1 \varepsilon^{-j\omega t_1} + \alpha_2 \varepsilon^{-j\omega t_2}|$ é, nesse caso, uma função periódica de ω, cujo período é o m. m. c. de $\frac{2\pi}{t_1}$ e $\frac{2\pi}{t_2}$, pelo que os picos do cepstro ocorrerão apenas nos múltiplos do m. d. c. de t_1 e t_2.

Na fig. 32 mostra-se o aspecto teórico de um cepstro com os atrasos nos pontos 102 e 128, com α_1 e α_2 ligeiramente inferiores a $\frac{1}{2}$, no qual se indicam os picos correspondentes às combinações de t_1 e t_2 até à 4.ª ordem.

Notar que outros picos que ocorrem perto destes se devem ao efeito de «aliasing» sobre os picos de ordem superior.

Na fig. 33 vê-se o cepstro de um ruído branco com ecos idênticos aos da fig. 32 onde se encontram identificados alguns dos picos mais notórios.

Como exemplo de um caso em que o desenvolvimento do logaritmo não é válido, mostra-se na fig. 34 o cepstro teórico de um sinal com ecos atrasados de 102 e 128 pontos, sendo as amplitudes dos ecos iguais às do sinal; como pormenores importantes, são de notar o aparecimento do pico correspondente a $t_2 - t_1$, e ainda os referentes a $2t_1 - t_2$ e $2t_2 - t_1$. Chamam-se a atensão para o facto de só ocorrerem picos (pelo menos com valor apreciável) em pontos correspondentes a combinações inteiras dos atrasos, embora atrás se

tivesse previsto que podessem ocorrer em qualquer múltiplo do m. d. c. dos atrasos, o qual vale dois pontos, neste caso.

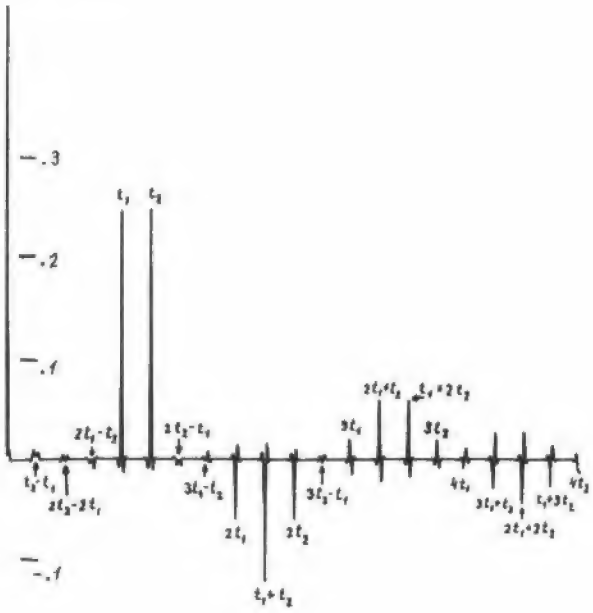


Fig. 32 — Cepstro teórico de um sinal, com dois ecos, de amplitude relativa 0.49 e atrasos de 102 e 128 pontos, respectivamente.

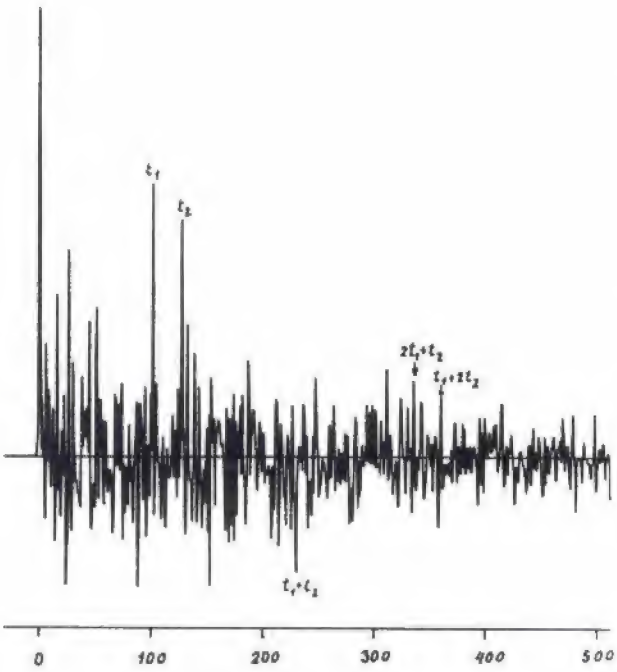


Fig. 33 — Cepstro de ruído branco com dois ecos, de amplitude 0.49 e atrasos de 102 e 128 pontos, respectivamente
(102) = 0,134
(128) = 0,118

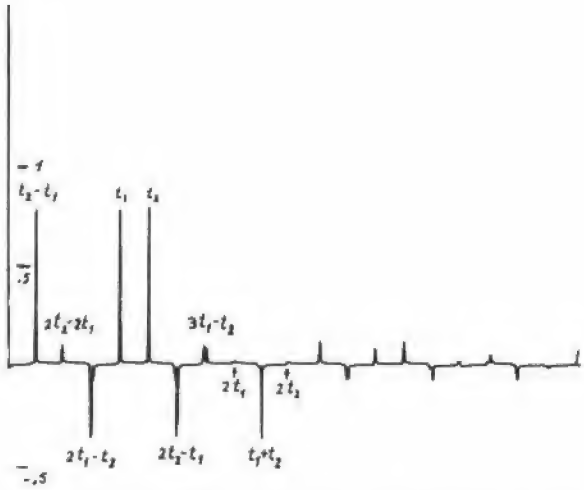


Fig. 34 — Cepstro teórico de um sinal com dois ecos de amplitude igual à do sinal, e atrasos de 102 e 128 pontos, respectivamente

7 — ECOS COM ESPECTRO DIFERENTE DO DO SINAL

Suponhamos um sinal de espectro $X(\omega)$ e um eco, atrasado de t_o, cujo espectro seja $Y(\omega)\ \varepsilon^{-i\omega t_o}$.

O logaristmo do módulo do espectro de $z(t) = x(t) + y(t - t_o)$ será

$$\log |Z(\omega)| = \log |X(\omega)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times$$

$$\times \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}\ \varepsilon^{-i\omega t_o}\right]^n\right\} \qquad (12)$$

se $|Y(\omega)| < |X(\omega)|$, $\forall\ \omega$.

Fazendo

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

função de transferência do filtro que transforma o sinal no eco, e sendo $h(t)$ a sua transformada inversa, resposta desse filtro a uma função de Dirac, deverá notar-se no cepstro, em vez do pico principal, a forma da função $\frac{1}{2}\left| h(t - t_o) + h(-t - t_o) \right|$

Se $h(t) = 0$ para $t < 0$, na parte positiva do eixo horizontal aparecerá apenas a forma de $h(t - t_o)$.

Este resultado compreende-se facilmente recorrendo à teoria dos ecos múltiplos. Com efeito podemos considerar que o eco é constituído pelo sinal atrasado de t_o passado pelo filtro $H(\omega)$, e que o passar o eco por este filtro corresponde a desdobrá-lo numa infinidade de ecos infinite-sinais de atrasos diferentes, visto que a resposta do filtro é

$$\int_0^{\infty} h(\tau)\ x(t - \tau)\ d\tau$$

Note-se que o facto de se exigir $|Y(\omega)| < |X(\omega)|$ vai originar que seja $|H(\omega)| < 1$, o que implica que, no cepstro, a função $h(t - t_o)$ — e $h(-t - t_o)$ — terá uma amplitude bastante reduzida, tanto mais, quanto maior for a sua duração no tempo, e será, certamente mais difícil de identificar que o pico produzido por um eco idêntico ao sinal.

Às potências superiores do desenvolvimento do logaritmo irão corresponder, no cepstro, as autoconvoluções repetidas de h(t), com atrasos múltiplos de t_o, e as de $h(-t)$ com atrasos múltiplos de $-t_o$; mais uma vez, se $h(t) = 0$ para $t < 0$, as autoconvoluções de $h(-t)$ estarão todas na parte negativa do eixo horizontal, e as de h (t) situar-se-ão apenas para diante do ponto $2t_o$, pelo que se pode ter a certeza de que, entre t_o e $2t_o$, a única forma que ocorre é a de $h(t - t_o)$.

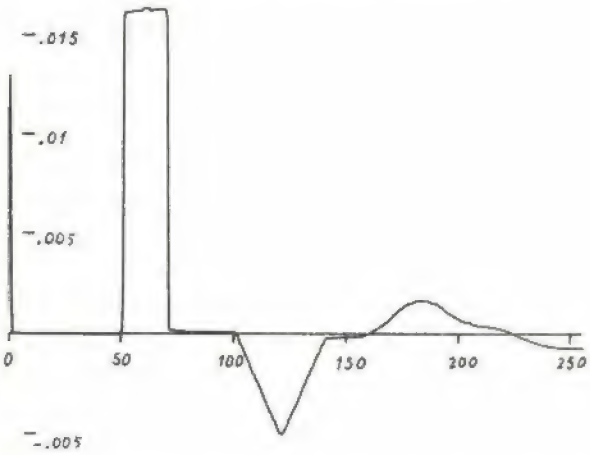


Fig. 35 — Cepstro teórico de um sinal, com eco passado por um filtro de resposta h(t) rectangular, tal que $H(\omega) < 1$

Na fig. 35 vê-se o cepstro teórico dum sinal com um eco com atraso de 51 pontos (1) passado por um filtro cuja função h (t) é um rectângulo com 20 pontos de largura, e amplitude 0,032; dado que $20 \times 0{,}032 = 0{,}64 < 1$, estamos dentro dos limites de validade do desenvolvimento em série do logaritmo.

Na fig. 36 apresenta-se a média de 100 cepstros obtidos a partir de ruído branco, por um tratamento idêntico ao atrás descrito. Faz-se notar que o pico em $\tau = 0$ foi anulado, para aumentar a precisão dos cálculos.

Na fig. 37 mostra-se o cepstro teórico, obtido agora com um rectângulo de amplitude 0,062; como $20 \times 0{,}062 = 1{,}24 > 1$, o desenvolvimento em série do logaritmo não é válido para todos os valores de ω, o que justifica que o cepstro não seja nulo nos pontos entre 1 e 50 e entre 71 e 101.

Na fig. 38 pode observa-se a média de 100 cepstros de ruído branco, com eco produzido deste modo.

O tratamento teórico desta situação, em que para alguns valores de ω se tem $|X(\omega)| < |Y(\omega)|$ e para outros $|X(\omega)| > |Y(\omega)|$ parece-nos difícil de fazer mesmo de modo aproximado.

Da análise anterior parece-nos poderem tirar-se conclusões quanto à utilidade do uso de janelas na determinação do cepstro; dado que o uso de uma janela no logaritmo do espectro de potência vai corresponder no cepstro à convolução pela transformada dessa janela, a sua utilização só será normalmente util quando permitir acentuar a presença do eco, face às variações aleatórias do cepstro; trata-se, no fundo, de um problema de detecção de um sinal imerso em ruído, e a janela a usar poderá depender muito da forma desse sinal (função h (t)); notemos que, para essa detecção, se poderia inclusivamente vir a mostrar útil a utilização de algo como um cepstro cruzado entre o cepstro obtido e a função h (t), caso esta fosse conhecida.

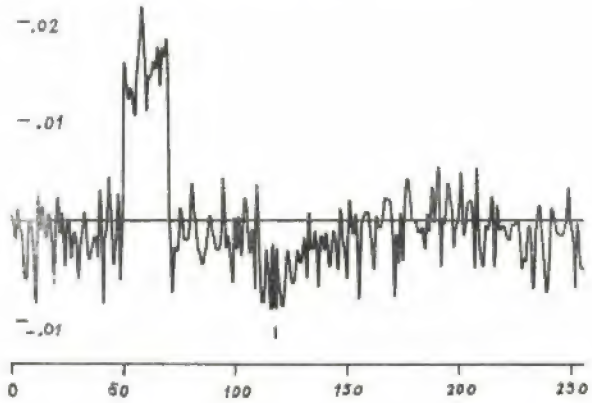


Fig. 36 — Cepstro de ruído branco, com eco, correspondente à fig. 35

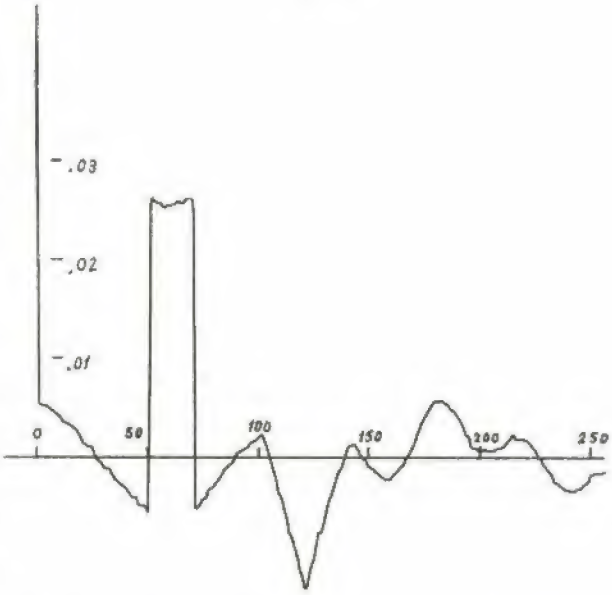


Fig. 37 — Cepstro teórico de um sinal, com eco passado por um filtro de resposta h (t) rectangular, tal que $H(\omega) > 1$ para alguns valores de ω

(1) — Usaram-se, neste caso amostras com 512 pontos

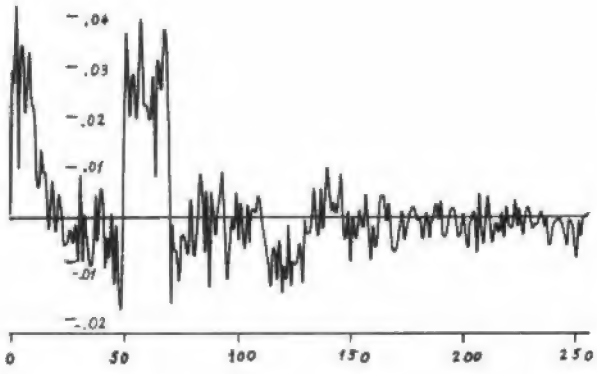


Fig. 38 — Cepstro de ruído branco com eco, correspondente à fig 37

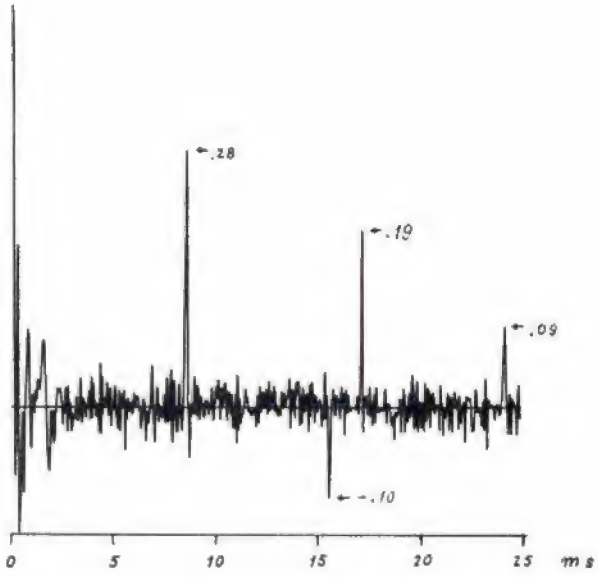


Fig. 39 — Cepstro de um registo experimental da vogal «A»

8 — CEPSTRO DE SINAIS PERIÓDICOS

O espectro de um sinal periódico é constituído por picos e anula-se entre eles, o que traz um problema teórico para o cálculo do cepstro.

No entanto, na prática, pode-se substituir o valor zero por um valor muito pequeno e obtêm-se assim funções com características muitos semelhantes às do cepstro. Na maior parte dos casos práticos, aliás, quer por erros de cálculo, quer por pequenos defeitos na periodicidade do sinal, quer ainda pela presença de ruído, o espectro não é nulo senão fortuitamente.

Caso não existisse o problema do anulamento de X (ω) este, sendo o produto de um pente de Dirac pela transformada de Fourier de um período do sinal, daria um logaritmo constituído pela soma dos logaritmos dessas duas parcelas. Note-se que o logaritmo de um pente de Dirac não apresenta mais problemas visto estar-se a trabalhar com métodos de cálculo digitais em que os impulsos de Dirac são representados por uma função que toma o valor 1 na origem e se anula nos restantes pontos.

A transformada inversa de Fourier desse logaritmo terá uma parcela constituída por um pente de Dirac. Na prática, dado que os logaritmos dos valores muito pequenos tomados por H (ω) entre os picos causam com frequência «overflows» negativos, os picos que aparecem no logaritmo comportam-se como tendo amplitudes diferentes, embora muito mais próximas umas das outras do que no espectro do sinal, pelo que a transforada inversa deverá apresentar um aspecto semelhante a um pente de Dirac com um espaçamento igual ao período do sinal.

Na fig. 39 apresenta-se o cepstro de uma amostra da vogal A, amostrada com o auxílio de um microfone.

Do que fica dito atrás conclui-se que o cepstro é bastante apropriado para a detecção de periodicidades em sinais.

9 — ANÁLISE DE ECOS REAIS

Os resultados atrás expostos baseiam-se em ecos criados artificialmente, por meio de técnicas digitais; certamente que, para ecos obidos em casos reais a situação deverá ser menos favorável; em particular, surge o problema de o atraso não ser, geralmente, múltiplo inteiro do intervalo de amostragem: como consequência, no logaritmo do módulo do espectro a oscilação sinusoidal não terá um período que seja submúltiplo da frequência máxima no espectro, o que dará origem a que no cepstro, não surja apenas um pico, mas sim alguns valores elevados em torno do ponto correspondente ao atraso, sendo todos eles, contudo, inferiores ao que se obteria no caso do atraso múltiplo do intervalo de amostragem. Além disso, neste caso, e desde que a amplitude do espectro do sinal não caia com suficiente rapidez em torno da frequência máxima correspondente ao ritmo de amostragem, o «aliasing» poderá obscurecer as oscilações sinusoidais no logaritmo do módulo do espectro. Isto dificultará a detecção do eco, principalmente em casos em que o espectro se mantém com amplitude aproximadamente constante numa larga banda em torno dessa frequência máxima; este facto dá-se mesmo que esta amplitude seja muito inferior à máxima amplitude atingida abaixo daquela frequência, isto é, mesmo que o sinal esteja francamente dentro das condições normalmente exigidas para aplicação do teorema da amostragem.

Para simular uma situação real, utilizou-se uma montagem constituída por um amplificador estereofónico, com entradas iguais para ambos os canais, e dois

altifalantes; nas proximidades de um deles colocou-se um microfone, ligado à entrada do conversor analógico-digital do analisador de Fourier; o sinal proveniente do altifalante mais afastado serviria, pois, de eco; a dferença das distâncias dos dois altifalantes ao microfone era de aproximadamente 1,5 m; as experiências foram levadas a cabo no laboratório do Centro, propositadamente sem quaisquer precauções no que respeita a reverberações. Usou-se um intervalo de amostragem de 20 μs e amostras de 1024 pontos.

Como primeiro teste ligou-se à entrada do amplificador um gerador de impulsos rectangulares, de 0,5 ms, tendo-se obtido as amostras representadas nas figs. 40 e 41, com ritmos de repetição diferentes para os impulsos; o eco é bem visível em ambas as figuras, e a segunda mostra ainda uma periodicidade; estas propriedades são facilmente detectáveis nos cepstros respectivos, fig. 42 e 43. É de notar que, sendo o microfone sensível à pressão, detecta o impulso rectangular como dois picos consecutivos, de sinais contrários e amplitudes iguais, podendo o segundo ser considerado com um eco do primeiro, o que justifica os picos negativos de grande amplitude junto da origem — pico principal e «harmónicas» (a amplitude do primeiro deles, na fig. 43, é praticamente igual à do pico representativo da periodicidade da função).

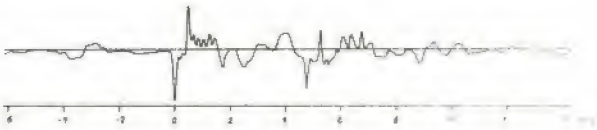


Fig. 40 — Amostra experimental de um sinal, localizado no tempo, com eco

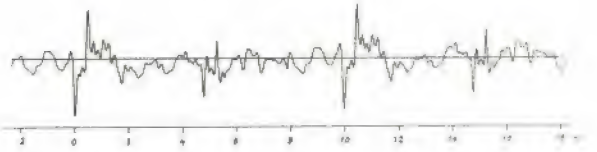


Fig. 41 — Amostra experimental de um sinal periódico com eco

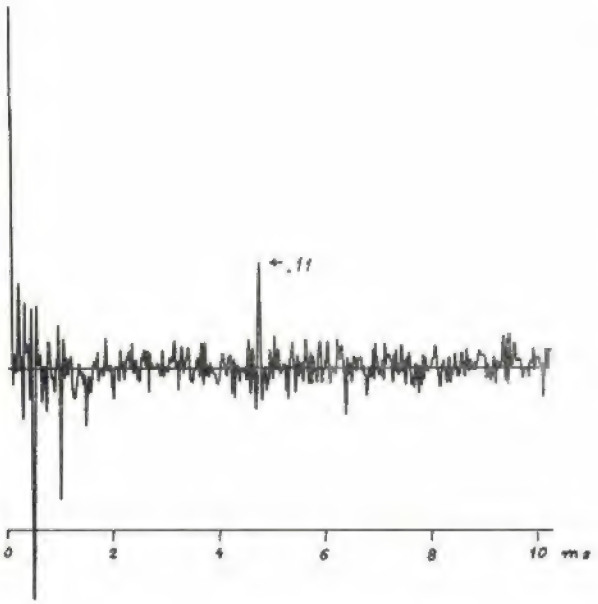


Fig. 42 — Cepstro da amostra da fig. 40

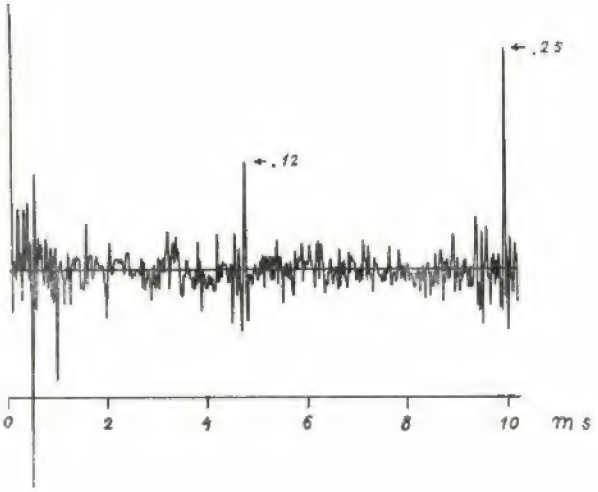


Fig. 43 — Cepstro da amostra da fig. 41

Numa segunda experiência aplicou-se à entrada do amplificador ruído branco passado por um filtro Butterworth passa-baixo de frequência de corte 10 KHz, mantendo-se a relação de intensidades anterior nos dois altifalantes.

O cepstro variava um pouco de amostra para amostra, sendo por vezes visível o pico correspondente ao eco; verificou-se porém que, efectuando dois «hannihgs» consecutivos no cepstro aparece, devido ao eco, mais de um ponto, o que pode ter duas causas; uma é o atraso não ser múltiplo do intervalo de amostragem, a outra é o espectro do eco não ser igual ao do sinal; a primeira das causas dá origem na prática apenas a dois valores elevados em torno do ponto correspondente ao atraso, pelo que não deve ser essa a causa principal do fenómeno atrás descrito. Quanto à outra causa, como já vimos atrás, vai fazer aparecer na zora do eco a resposta h (t) a um Dirac dum filtro que transformasse o sinal no eco; com base neste raciocínio, decidiu-se determinar essa resposta por meio de um média de 20 cepstros calculados em condições idênticas.

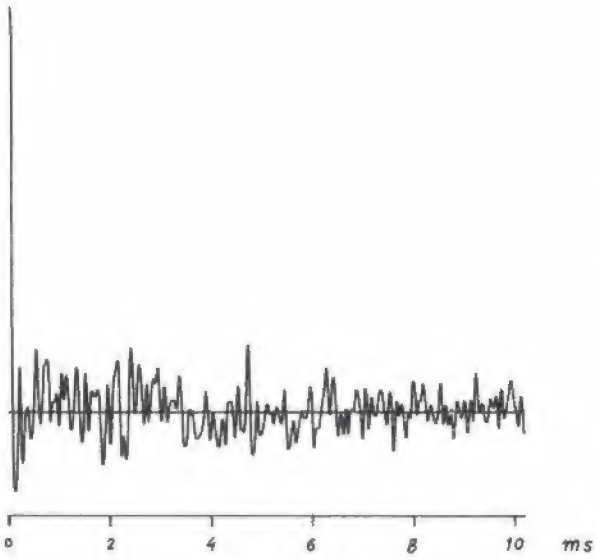


Fig. 44 — Cepstro de uma amostra de ruído de baixa frequência com eco, obtida experimentalmente; o cepstro foi submetido a dois Hannings consecutivos

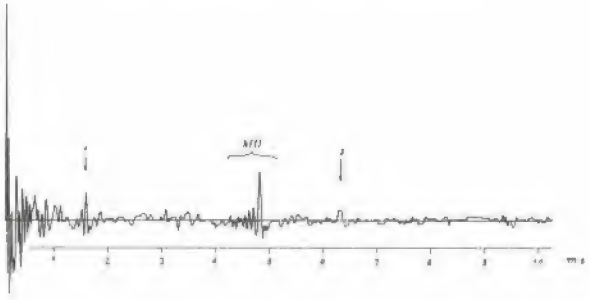


Fig. 45 — Média de 40 cepstros de amostras experimentais de ruído de baixa frequência com eco. O pico de h (t) vale 0,128. Desta figura até à 49 existe um overflow junto da origem

Para confirmar os resultados obtidos, a média foi prolongada até 40 amostras, não se tendo modificado apreciavelmente a sua forma; o resultado final apresenta-se na fig. 45.

Nesta figura está bem patente a referida resposta, mas existem também outros pormenores que merecem alguma análise; são eles as formas referenciadas pelos números 1 e 2, que estão a 1,45 ms (1) respectivamente da origem e do pico principal de h (t). Ora, quando atrás se falou de ecos múltiplos, viu-se que o cepstro devia apresentar picos correspondentes aos atrasos e à sua soma, se o desenvolvimento em série do logaritmo fosse válido, e se utilizassem apenas os termos até ao 2.º grau; caso contrário, poderiam aparecer quaisquer múltiplos do m.d.c. dos dois atrasos, e em particular a diferença entre eles, desde que os atrasos fossem comensuráveis, o que pode sempre ser considerado verdareiro, na prática. Com isto em mente, procurou-se interpretar o pico 2 com um eco mais atrasado, estando o pico 1 localizado na diferença dos atrasos dos dois ecos.

Para confirmar tal hipótese, realizaram-se três experiências, cujos resultados se mostram nas fig. 46, 47 e 48.

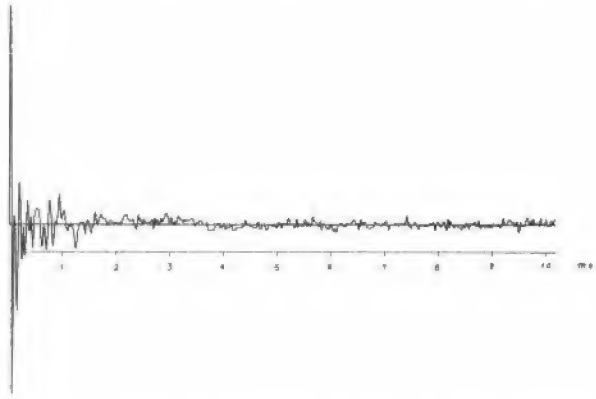


Fig. 46 — Média de 20 cepstros de ruído de baixa frequência transmitido unicamente pelo altifalante mais próximo do microfone

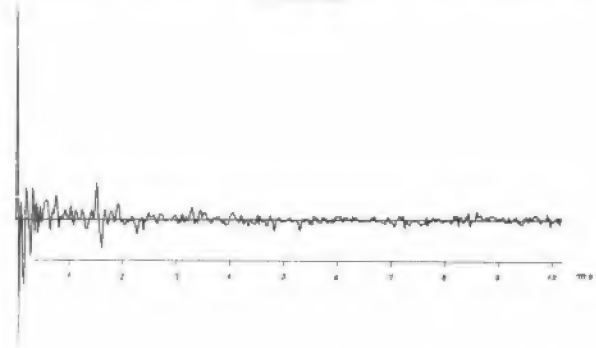


Fig. 47 — Média de 20 cepstros de ruído de baixa frequência transmitido unicamente pelo altifalante mais afastado do microfone

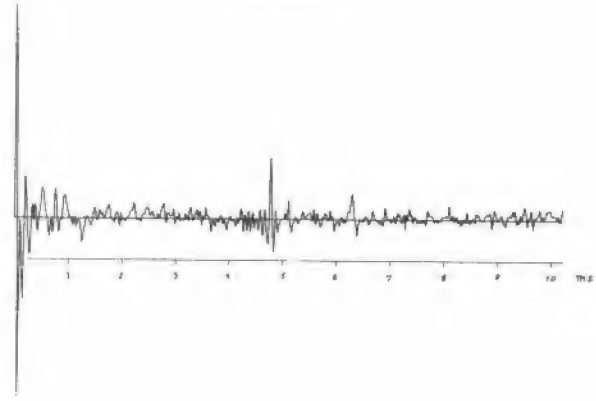


Fig. 48 — Média de 20 cepstros de ruído de baixa frequência, com eco. Os picos valem 0,062 e 0,025 respectivamente

(1) — medidos nos picos positivos mais importantes.

Consistiu a primeira delas em realizar uma média de 20 cepstros, tendo apenas a funcionar o altifalante mais próximo do microfone; não se nota no resultado qualquer pico significativo, em nenhuma das zonas em estudo.

Na segunda experiência, pelo contrário, teve-se a funcionar apenas o altifalante mais afastado; nota-se no resultado a presença de um eco com um atraso de exactamente 1,45 ms, o que parece confirmar a interpretação atrás, sendo então o segundo eco devido à existência de um caminho alternativo do sinal desde o altifalante mais afastado até ao microfone.

Na terceira experiência tentámos, pois, colocar-nos dentro dos limites de validade do desenvolvimento em série do logaritmo, por meio de uma redução do valor sonoro do altifalante mais afastado; realizada uma nova média de 20 cepstros, obteve-se como resultado a fig. 48, na qual se observam os picos correspondentes aos dois ecos, e desapareceu o que correspondia à diferença dos atrasos; note-se que a variação da forma de h (t) da fig. 45 para a 48, embora possa ser em grande parte uma variação de tipo aleatório, se deve também com certeza a ter-se passado para dentro dos limites de validade do desenvolvimento do logaritmo, o que significa que a forma apresentada na fig. 48 está provavelmente, mais correcta.

Fez-se um outro teste com ruído de baixa frequência (ruído passado por um filtro Butterworth passa-baixo de frequência de corte 2 KHz), tendo-se obtido, como média de 40 cepstros, o representado da fig. 49, onde são bem visíveis os dois ecos atrás referidos; o facto de a forma do cepstro nas zonas representativas dos ecos diferir das atrás encontradas pode ser imputado a erros de cálculo, especialmente na zona (aqui bastante extensa) em que o espectro tem valores muito baixos.

Por curiosidade, fez-se ainda aqui a média das autocorrelações de 40 amostras, tendo-se obtido o resultado documentado na fig. 50.

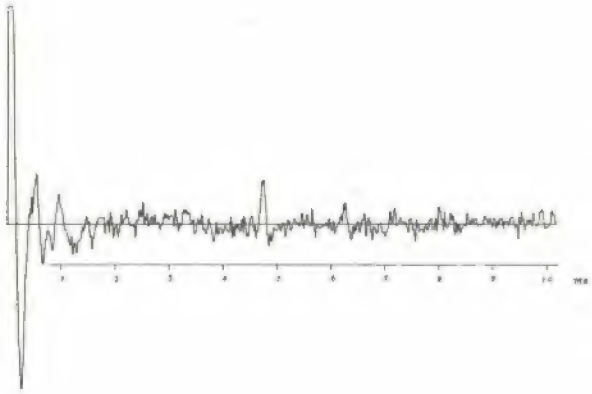


Fig. 49 — Média de 20 cepstros de ruído de muito baixa frequência, com eco

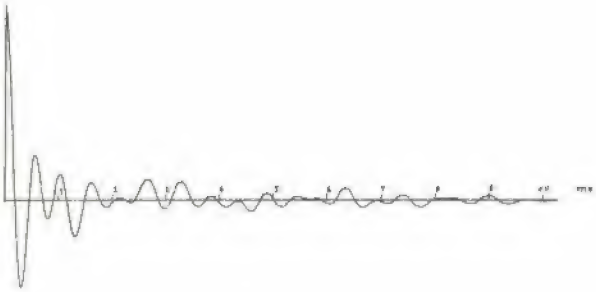


Fig. 50 — Média de 40 autocorrelações de ruído de muito baixa frequência, com eco

10 — CONCLUSÕES

Verificou-se que, nos casos analisados, o cepstro é pelo menos tão apropriado para a detecção de ecos e periodicidades como a autocorrelação, sendo, inclusive, capaz de detectar claramente ecos em casos em que aquela falha completamente, ou deixa muito impreciso o valor do atraso do eco em relação ao sinal.

Como desvantagem principal, temos o aparecimento de picos secundários, cuja relação de amplitudes com a dos picos principais pode ser bastante complicada, principalmente para ecos de grande amplitude; de notar, porém, que na autocorrelação aparecem também picos secundários desde que exista mais de um eco.

Nos casos em que o eco difere marcadamente do sinal, e desde que a amplitude daquele seja suficientemente pequena, surge no cepstro, em vez de um pico, a forma da resposta, a um impulso de Dirac, do filtro que transformasse o sinal no eco.

Não vemos razão para o uso das técnicas de «liftering» usadas em [1], e o uso de janelas na determinação do cepstro parece-nos útil só em determinadas condições, quando o eco difere do sinal.

Agradecimento

Não queremos terminar sem expressar o nosso reconhecimento ao Dr. Rebelo Simões, quer por nos ter facultado a realização do presente estágio, quer pelo modo como acompanhou, com sugestões e esclarecimentos vários, a sua execução.

BIBLIOGRAFIA

1 — B. P. Bogert, M. J. Healy e J. W. Tukey, «The quefrency alanysis of time series for echoes: cepstrum, pseudo-autocovariance, cross-cepstrum and saphe cracking» in Proc. Symp. Time Series

Analysis, M. Rosenblat, Ed. New York: Wiley, 1963, cap. 15, págs. 209-243.
2 — T. J. Cochen,«Source-depth determinations using spectral, pseudo-autocorrelation and cepstral analysis», Geophys. J. Roy. Astron. Soc., vol. 20, págs. 223-231, 1970.
3 — T. J. Ulrich, «Application of homomorphic deconvolution to seismology», Geophysics, vol. 36, págs. 650-660, Ago. 1971.
4 — A. M. Noll, «Short-time spectrum and cepstrum techniques for vocal-pitch detection», J. Acoust. Soc. Amer., vol. 36, págs. 296-302, Fev. 1964.
5 — S. Senmoto e D. G. Childers, «Adaptative decomposition of a composite signal of identical unknown wavelets in noise», IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-2, págs. 59-66, Jan. 1972.
6 — A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, e T. G. Stockham, Jr., «Nonlinear filtering of multiplied and convolved signals», Proc. IEEE, vol. 56, págs. 1264-1291, Ago. 1968.
7 — R. C. Kemerait e D. G. Childers, «Signal detection and extraction by cepstrum techniques», IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-18, págs. 745-759, Nov. 1972.
8 — B. P. Borgert e J. F. Ossanna, «The heuristics of cepstrum analysis of a stationary complex echoed Gaussian signal in stationary Gaussian noise», IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-12, págs. 373-380, Jul 1966.
9 — A. V. Oppenheim, «Superposition in a class of nonlinear systems», Res. Lab. Electron., M. I. T., Cambridge, Mass. Tech. Rep. 432, 31 de Mar. 1965.
10 — R. W. Shafer, «Echo removal by discrete generalized linear filtering», dissertação de Ph D., M. I. T., Cambridge, Mass., 1968.

APÊNDICE

Validade da dissociação do somatório em i na série (11)

Convém, antes de mais, esclarecer exactamente o que entendemos aqui por «dissociar o somatório».

Consideremos a série genérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=o}^{n} a_{in} \right\}$$

cujos termos são $\sum_{i=o}^{n} a_{in}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=o}^{n} a_{in} \right\} = (a_{01} + a_{11}) + (a_{02} + a_{12} + a_{22}) + (a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{33}) + \ldots$$

Dizemos que dissociámos o somatório em i nesta série se a substituirmos pela série que representamos, talvez impropriamente, por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=o}^{n} a_{in} = a_{01} + a_{11} + a_{02} + a_{12} + a_{22} + a_{03} + a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{04} + \ldots$$

Para demonstrar a convergência da série depois de dissociado o somatório, consideremos primeiramente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} |\alpha_1|^{n-i} |\alpha_2|^{i} \right\}$$

Dado que $|\alpha_1| + |\alpha_2| < 1$, esta série é um caso particular daquela que queremos estudar, desde que nela se faça $\omega = 0$. Dado tratar-se de uma série resultante de um desenvolvimento em série de potências, será absolutamente convergente, o que significa que é convergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=o}^{n} \frac{1}{n} |\alpha_1|^{n-i} |\alpha_2|^{i} \right\}$$

Chamando s_n à sucessão associada a esta série, e s'_n à associada à série que se obtém desta pela dissociação atrás referida, vemos que, por um lado, s'^n deverá ser monótona, e por outro lado s_n será uma subsucessão convergente de s'_n ; nestas condições s'_n deverá ser convergente para o mesmo limite que s_n , isto é, as séries, antes e depois da dissociação, terão a mesma soma.

Porém, dado que

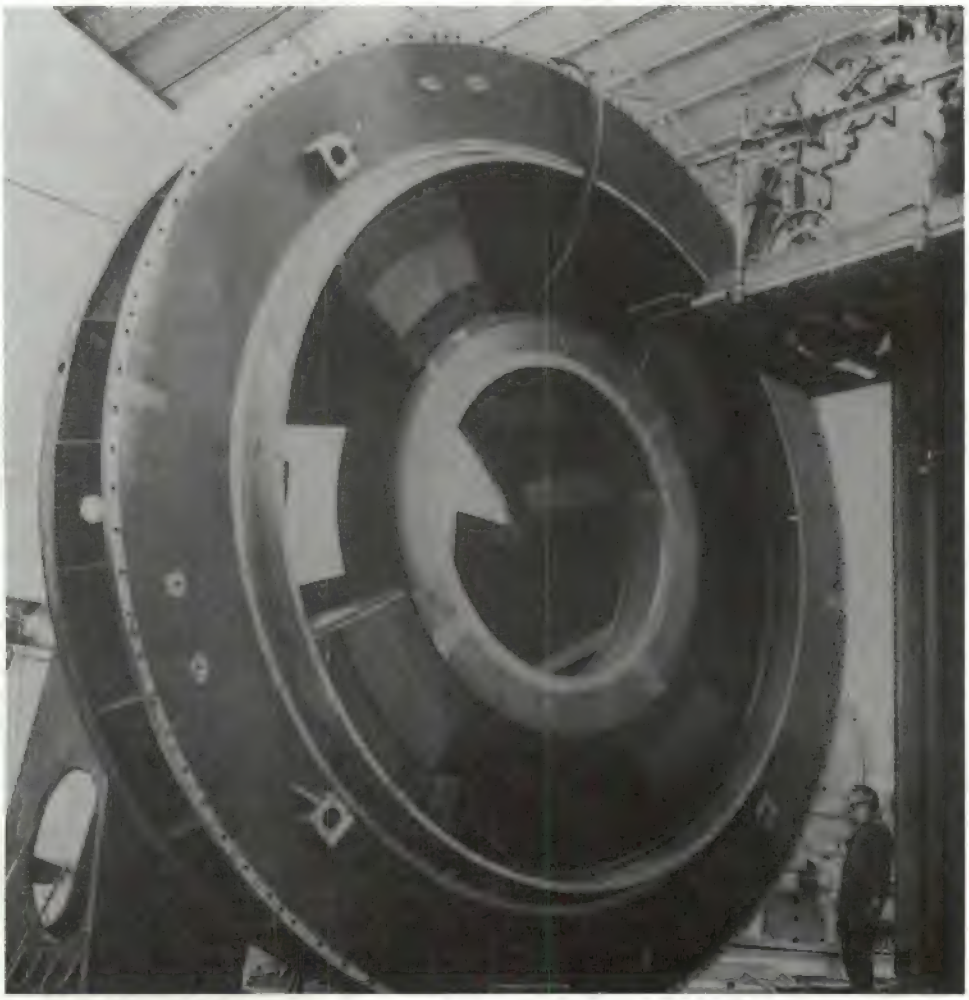
$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \alpha_1^{n-i} \alpha_2^{i} \cos \omega \left[n t_1 + i (t_2 - t_1) \right] \right| \leqslant \frac{1}{n} |\alpha_1|^{n-i} |\alpha_2|^{i} \qquad \text{(A 1)}$$

verificamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=o}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \alpha_1^{n-i} \alpha_2^{i} \cos \omega \left[n t_1 + i (t_2 - t_1) \right] \qquad \text{(A 2)}$$

será absolutamente convergente (e a sua soma não será alterada, evidentemente, pela dissociação).

MAGUE



«Maquinagem do manto de uma das Turbinas Kaplan de 95.000 CV para a Central de Carrapatelo, da Companhia Portuguesa de Electricidade, S. A. R. L.»

(Colaboração com KMW-NOHAB)

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

Topografia Geral

2.º VOLUME

Pelo Engenheiro

A. C. XEREZ

Preço de cada volume

180$00

•

Desconto: 10% aos assinantes

Pedidos à Técnica

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

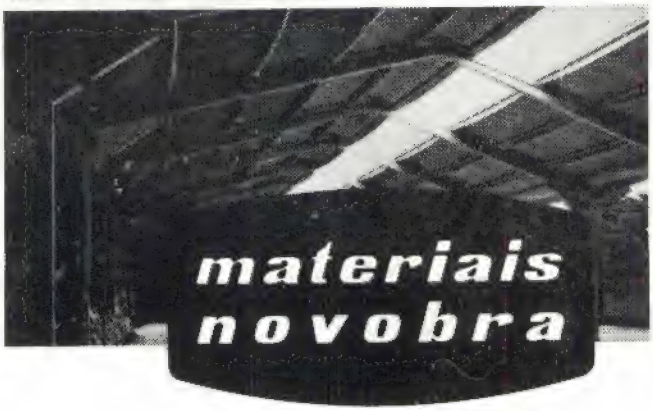
Preço 250$00
Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À

técnica

PÓRTICOS «CRENDON»

De pré-fabricacão total, montagem rapidissima feita pelas n/ equipas especializadas e de aproveitamento total de todo o espaço em altura visto não existirem linhas de asnas.



A mais vasta gama em pré-fabricados de betão.

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, «post-esforço Losinger», pontões, vigas de grande vão, pórticos «Crendon», pavimento «Trief», protecção de segurança «Trief», mosaicos, tubos, blocos «Leca», espaçadores de betão, estacas para vinhas e pomares e pré-fabricação total ou parcial

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda, Moita, Luanda, Lourenço Marques

Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5o. Dto. – Lisboa-5
Telefones – Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53
Serviços Técnicos: 71 41 16/7/8 - 71 93 31/2

C. D. U. 624.072:23

Vigas continuas parcialmente encastradas

J. S. BRAZÃO FARINHA

RESUMO

Apresenta-se o formulário geral correspondente a vigas continuas simétricas de 2a 4 tramos, com apoios extremos parcialmente encastrados. Elaboram-se tabelas para os casos de iguais vãos e actuação de cargas de distribuição trapezoidal, e de desiguais vãos e actuação de cargas uniformemente distribuidas.

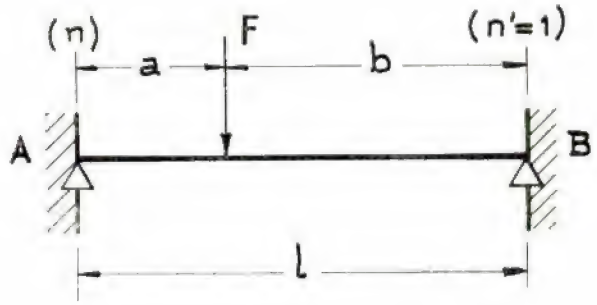
Toda a dedução se baseia na aplicação do método de Cross, notávelmente expedito para este tipo de estruturas.

SYNOPSIS

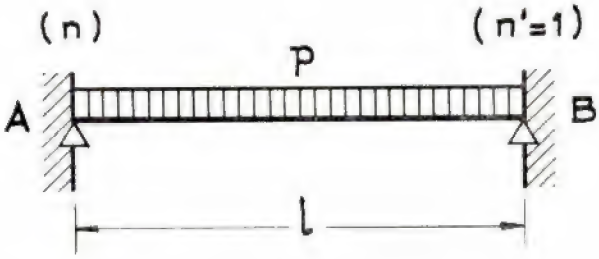
The general analisis of continuous simmetrical and partialy fixed end beams is developed by Cross method. Some tables of trapezoidal charges and rectangular charges, are presented.

Consideramos as vigas continuas com um grau igual de encastramento parcial nos dois apoios extremos. Esta hipótese é certamente importante no cálculo de estruturas de edifícios, notando-se a quasi inexistência de literatura a tal respeito, uma vez que a regra praticamente geral dos inúmeros autores que se têm ocupado destes problemas é a apresentação das vigas continuas com apoios extremos de rotação livre. Salientamos também que em regra não podemos tomar para valores dos máximos momentos nos vãos a soma dos que são obtidos isoladamente para a sobrecarga e para a carga permanente, porque eles não se verificam sempre na mesma secção da viga.

O problema é apresentado através da aplicação do método de Cross (*) considerando a viga parcialmente encastrada em A e perfeitamente encastrada em B.

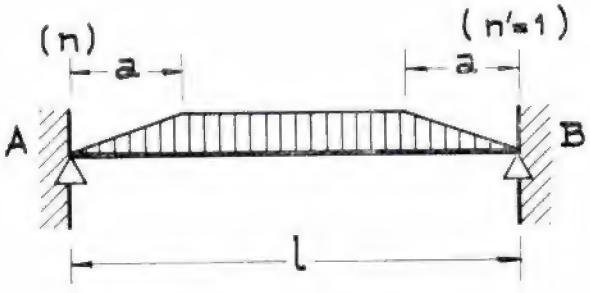


$$\begin{cases} M_A = -\dfrac{Fab^2}{l^2}\, n \\[2ex] M_B = -\dfrac{Fab}{2\, l^2}\left[\, 2\, a + b\, (1 - n)\,\right] \end{cases}$$



$$\begin{cases} M_A = -\dfrac{pl^2}{12}\, n \\[2ex] M_B = -\dfrac{pl^2}{24}\, (3 - n) \end{cases}$$

(*) J. S. Brazão Farinha — «O Encastramento Parcial no Método de Cross» Técnica n.º 260 Março 1956 pág. 329; «Vigas Parcialmente encastradas nos Apoios» Técnica Maio 1963 (pág. 613) e Janeiro 1964 (pág. 215).



$$\begin{cases} M_A = -\dfrac{p}{12\,l}\,n\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right] \\ M_B = -\dfrac{p\,(3-n)}{24\,l}\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right] \end{cases}$$

Assentamento do apoio A .....

$$\begin{cases} M_A = \dfrac{6EI}{l^2}\,n\,\Delta \\ M_B = -\dfrac{3\,(1+n)}{l^2}\,EI\,\Delta \end{cases}$$

Rigidez em B e coeficiente de transmissão de B para A

$$\begin{cases} K = (3+n)\,\dfrac{EI}{l} \\ \beta = \dfrac{2n}{3+n} \end{cases}$$

Os momentos de encastramento perfeito são facilmente obtíveis para qualquer tipo de carga, pelo próprio método de Cross. No apoio parcialmente encastrado de grau n da viga de só tramo aparece o momento de encastramento perfeito multiplicado por n, e no apoio perfeitamente encastrado o momento de encastramento perfeito somado como metade do momento aplicado no outro apoio, isto é (1 — n) vezes o momento de encastramento perfeito correspondente ao apoio parcialmente encastrado. Exemplo, para a viga sujeita a uma carga de distribuição trapezoidal os momentos de encastramento perfeito nos dois extremos da viga são iguais entre si e a $\dfrac{p}{12\,l}\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right]$

Se o apoio esquerdo for o apoio parcialmente encastrado, isto significa que nele o momento será

$$\frac{p}{12\,l}\,n\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right]$$

e o momento no apoio perfeitamente encastrado será

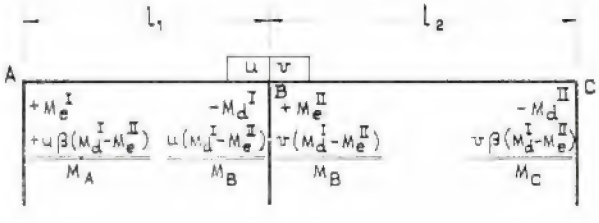
$$\left[\frac{p}{12\,l} + \frac{1-n}{2}\,\frac{p}{12\,l}\right]\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right] = \frac{p}{24\,l}\,(3-n)\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right]$$

Quanto à transmissão de momentos, pode-se, através de um único cálculo para cada tipo de viga, resolver todos os casos de carga permanente e de alternância de sobrecargas(*).

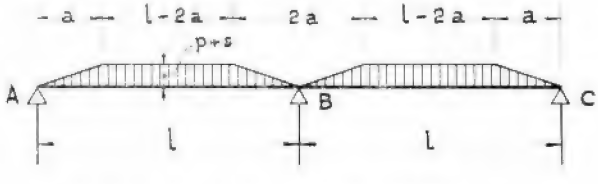
1 — VIGAS DE DOIS TRAMOS

No caso da viga de dois tramos, para o grau n de encastramento parcial nos dois apoios 1 e 3, os coeficientes de distribuição são

$$u = \frac{l_2}{l_1 + l_2} \qquad v = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$



1.1 — *Carga de distribuição trapezoidal, para $l_1 = l_2 = l$*



Para a actuação da carga permanente p

$$M^{I}_{e} = M^{II}_{d} = \frac{p}{12\,l}\,n\left[l^3 - a^2\,(2\,l - a)\right]$$

(*) Nos termos indicados simplifica-se o trabalho apresentado na Técnica, Maio 1955.

$$M^{I}_{d} = M^{II}_{e} = \frac{p}{24\ l}(3-n)\left[l^3 - a^2\ (2\ l - a)\right]$$

Substituindo, e adoptando a convenção corrente de sinais teremos

$$M_A = M_C = -\ k_A\ pl^2$$

$$k_A = \frac{n}{12}\left[1 - (\frac{a}{l})^2\ (2 - \frac{a}{l})\right]$$

$$M_B = -\ k_B\, pl^2$$

$$k_B = \frac{3-n}{24}\left[1 - (\frac{a}{l})^2\ (2 - \frac{a}{l})\right]$$

donde se tira

$$R_A = R_C = k'_A\, pl$$

$$k'_A = \frac{1}{2}\ (1 - \frac{a}{l}) - (k_2 - k_1)$$

$$T_{B_1} = T_{B_2} = k'_B\, pl$$

$$k'_B = \frac{1}{2}\ (1 - \frac{a}{l}) - (k_2 - k_1)$$

$$R_B = T_{B_1} + T_{B_2}$$

Para a actuação da sobrecarga acidental s no 1.° tramo

$$M^{I}_{e} = \frac{s}{12\ l}\ n\ \left[l^3 - a^2\ (2\ l - a)\right];$$

$$M^{II}_{e} = M^{II}_{d} = 0$$

$$M^{I}_{d} = \frac{p}{24\ l}(3-n)\left[l^3 - a^2\ (2\ l - a)\right]$$

donde, substituindo e adoptando a convenção corrente de sinais,

$$M_A = -\ k^{I}_{A}\ sl^2$$

$$k^{I}_{A} = \frac{n\ (9+n)}{24\ (n+3)}\left[1 - (\frac{a}{l})^2\ (2 - \frac{a}{l})\right]$$

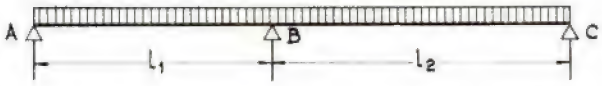
$$M_B = -\ k^{I}_{B}\ sl^2$$

$$k^{I}_{B} = \frac{3-n}{48}\left[1 - (\frac{a}{l})^2\ (2 - \frac{a}{l})\right]$$

$$M_C = k^{I}_{C}\ sl^2$$

$$k^{I}_{C} = \frac{n\ (3-n)}{24\ (n+3)}\left[1 - (\frac{a}{l})^2\ (2 - \frac{a}{l})\right]$$

1.2 — *Carga uniformemente distribuída*



Para a actuação da carga permanente

$$M^{I}_{e} = \frac{pl^2_1}{12}\ n \quad ; \quad M^{II}_{d} = \frac{pl^2_2}{12}\ n$$

$$M^{I}_{d} = \frac{pl^2_1}{24}\ (3-n) \quad ; \quad M_{e} = \frac{pl^2_2}{24}\ (3-n)$$

Substituindo vem

$$M_A = -\ k_A\, pl^2_1 \quad ;$$

$$k_A = \frac{n}{12}\left[1 - \frac{l_2}{l_1}(\frac{l_2}{l_1} - 1)\ \frac{3+n}{3-n}\right]$$

$$M_B = -\ k_B\, pl^2_1 \quad ;$$

$$k_B = \frac{3-n}{24}\left[1 + \frac{l_1}{l_2}(\frac{l_2}{l_1} - 1)\right]$$

$$M_C = -\ k_C\, pl^2_1 \quad ;$$

$$k_C = \frac{n}{12}\left[(\frac{l_2}{l_1})^2 + (\frac{l_1}{l_2} - 1)\ \frac{3-n}{3+n}\right]$$

Para a actuação da sobrecarga acidental no 1.° tramo, mantem-se os valores anteriores, sendo $M^{II}_{e} = M^{II}_{d} = 0$. Teremos

$$M_A = -\ k^{I}_{A}\ sl^2_1 \ ; \quad k_A = \frac{n}{12}\left[1 + \frac{l_2/l_1}{1 + l_2/l_1}\ \frac{3-n}{3+n}\right]$$

$$M_B = -\ k^{I}_{B}\ sl^2_1 \ ; \quad k^{I}_{B} = \frac{3-n}{24}\ \frac{1}{1 + l_2/l_1}$$

$$M_C = k^{I}_{C}\ sl^2_1 \ ; \quad k^{I}_{C} = \frac{(3-n)\ n}{12\ (n+3)}\ \frac{1}{1 + l_2/l_1}$$

Na hipótese da sobrecarga ocupar o 2.° tramo, será, de modo análogo,

$$M_A = k^{II}_{A}\ sl^2_1 \qquad k^{II}_{A} = \frac{n}{12}\ \frac{3-n}{3+n}(\frac{l_2}{l_1})^2\ \frac{l_2/l_1}{1 + l_2/l_1}$$

$$M_B = -\ k^{II}_{B}\ sl^2_1 \qquad k^{II}_{B} = \frac{3-n}{24}(\frac{l_2}{l_1})^2\ \frac{l_2/l_1}{1 + l_2/l_1}$$

$$M_C = -\ k^{II}_{C}\ sl^2_1 \qquad k^{II}_{C} = \frac{n}{12}(\frac{l_2}{l_1})^2 \times$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{1 + l_2/l_1}\ \frac{3-n}{3+n}\right]$$

2 — VIGAS DE TRÊS TRAMOS

Todas as hipóteses de carga se reduzem a uma situação de carga simétrica, ou à soma desta com uma situação de carga anti-simétrica. Num e noutro caso tomam-se para rigidezes da barra central respectivamente

$$\frac{2\ EI}{l_2} \quad e \quad \frac{6\ EI}{l_2}$$

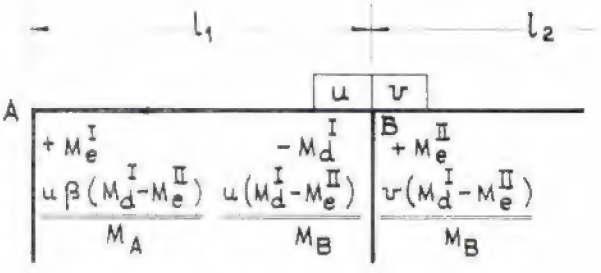
donde no caso da solicitação simétrica

$$u = \frac{(3+n)\ l_2}{2\ l_1 + (3+n)\ l_2} \qquad v = \frac{2\ l_1}{2\ l_1 + (3+n)\ l_2}$$

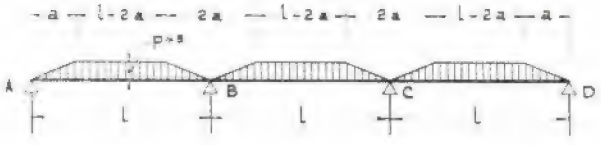
e no caso de solicitação anti-simétrica

$$u = \frac{(3+n)\ l_2}{6\ l_1 + (3+n)\ l_2} \qquad v = \frac{6\ l_1}{6\ l_1 + (3+n)\ l_2}$$

A transmissão de momentos exprime-se do seguinte modo:



2.1 — *Cargas de distribuição trapezoidal para $l_1 = l_2 = l$*



Para a actuação da carga permanente p,

$$M^I_e = \frac{p}{12\ l}\ n \left[l^3 - a^2\ (2\ l - a) \right]$$

$$M_d = \frac{p}{24\ l}\ (3-n) \left[l^3 - a^2\ (2\ l - a) \right]$$

$$M^{II}_e = \frac{p}{12\ l} \left[l^3 - a^2\ (2\ l - a) \right]$$

Trata-se de uma solicitação simétrica para a qual

$$u = \frac{3+n}{5+n} \qquad v = \frac{2}{5+n}$$

$$M_A = -\ k_A\ pl^2$$

$$k_A = \frac{n}{2\ (5+n)} \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right) \right]$$

$$M_B = -\ k_B\ pl^2$$

$$k_B = \frac{1}{2\ (5+n)} 1 - \left(\left[\frac{a}{l} \right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right) \right]$$

$$M_C = -\ k_C\ pl^2 \qquad k_C = k_B$$

$$M_D = -\ k_D\ pl^2 \qquad k_D = k_A$$

A actuação da sobrecarga no 2.° tramo corresponde igualmente uma solicitação simétrica, com $M^I_e = M^I_d = 0$; $M^{II}_e = \frac{s}{12\ l} \left[l^3 - a^2\ (2\ l - a) \right]$

de modo que vem

$$M_A = k^{II}_A\ pl^2$$

$$k^{II}_A = \frac{n}{6\ (5+n)} \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right) \right]$$

$$M = -\ k^{II}_B\ pl^2$$

$$k^{II}_B = \frac{3+n}{12\ (5+n)} \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right) \right]$$

$$M_C = -\ k^{II}_C\ pl^2 \qquad k^{II}_C = k^{II}_B$$

$$M_D = k^{II}_D\ sl^2 \qquad k^{II}_D = k^I_A$$

A sobrecarga no 1.° tramo pode estudar-se através da sobreposição de uma solicitação simétrica (sobrecarga $\frac{s}{2}$ no 1.° e 3.° tramos) mais uma solicitação anti-simétrica ($\frac{s}{2}$ no 1.° e $-\frac{s}{2}$ no 3.° tramos). Virá portanto para $u = \frac{3-n}{9+n}$, $v = \frac{2}{5+n}$, $M^{II}_e = 0$, e depois para $u = \frac{3-n}{9+n}$, $v = \frac{6}{9+n}$, $M_e = 0$ e somando os dois valores para M_A e M_B e subtraindo para M_C e M_D

$$M_A = -\ k^I_A\ sl^2 \qquad k^I_A = \frac{n}{24} \left[2 + \frac{3-n}{5+n} + \frac{3-n}{9+n} \right] \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right) \right]$$

$$M_B = -k^I_B\, sl^2 \qquad k^I_B = \frac{3-n}{6}\,\frac{6+n}{(5+n)\,(9+n)} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_C = k_C\, sl^2 \qquad k^I_C = \frac{3-n}{12}\,\frac{3-n}{(5+n)\,(9+n)} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_D = -k_D\, sl^2 \qquad k^I_A = \frac{n}{6}\,\frac{3-n}{(5+n)\,(9+n)} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

2.2 — *Carga uniformemente distribuida*

Para a actuação da carga permanente fazemos

$$M^I_e = \frac{pl^2_1}{12}\, n; \qquad M^I_d = \frac{pl^2_1}{24}\,(3-n);$$

$$M_e = \frac{pl^2_1}{12} \qquad u = \frac{(3+n)\, l_2}{2\, l_1 + (3+n)\, l_2};$$

$$v = \frac{2\, l_1}{2\, l_1 + (3+n)\, l_2}.$$ Vem, substituindo,

$$M_A = -k_A\, pl^2_1 \qquad k_A = \frac{n}{6}\,\frac{1 + 3\, l_2/l_1 - (l_2/l_1)^3}{2 + (3+n)\, l_2/l_1}$$

$$M_B = -k_B\, pl^2_1 \qquad k_B = \frac{1}{12}\,\frac{(3-n) + (3+n)\,(l_2/l_1)^2}{2 + (3+n)\, l_2/l_1}$$

$$M_C = -k_C\, pl^2_1 \qquad k_C = k_3$$

$$M_D = -k_D\, pl^2_1 \qquad k_D = k_A$$

Para a actuação da sobrecarga no 2.° tramo estamos ainda em face de uma solicitação simétrica em que

$$M^I_e = M^I_d = 0, \quad M^{II}_e = \frac{sl_2^2}{12}$$

$$M_A = k^{II}_A\, sl^2_1 \qquad k^{II}_A = \frac{1}{6}\,\frac{n}{2 + (3+n)\, l_2/l_1}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$$

$$M_B = -k^{II}_B\, sl^2_1 \qquad k^{II}_B = \frac{1}{12}\,\frac{(3+n)}{2 + (3+n)\, l_2/l_1}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$$

$$M_C = -k^{II}_C\, sl^2_1 \qquad k^{II}_C = k^{II}_B$$

$$M_D = k_D\, sl^2_1 \qquad k^{II}_D = k^{II}_A$$

A actuação da sobrecarga no 1..° tramo é considerada como a soma de duas solicitações, uma simétrica para a qual $M^{II}_e = 0$, $M^I_e = \frac{sl^2_1}{24}\, n$, $M^I_d = \frac{3-n}{48}\, sl^2_1$

$$u = \frac{(3+n)\, l_2}{2\, l_1 + (3+n)\, l_2}, \quad v = \frac{2\, l_1}{2\, l_1 + (3+n)\, l_2}$$

e a outra anti-simétrica para a qual

$$u = \frac{(3+n)\, l_2}{6\, l_1 + (3+n)\, l_2}, \quad v = \frac{6\, l_1}{6\, l_1 + (3+n)\, l_2}.$$

Virá

$$M^I_A = -k^I_A\, sl^2_1$$

$$k^I_A = \frac{n}{24}\left[2 + \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{2 + (3+n)\, l_2/l_1} + \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{6 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^I_B = -k^I_B\, sl^2_1$$

$$k^I_B = \frac{3-n}{24}\left[\frac{1}{2 + (3+n)\, l_2/l_1} + \frac{3}{6 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^I_C = k^I_C\, sl^2_1$$

$$k^I_C = \frac{3-n}{24}\left[\frac{3}{6 + (3+n)\, l_2/l_1} - \frac{1}{2 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^I_D = -k^I_D\, sl^2_1$$

$$k^I_D = \frac{n}{6} - \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{[2 + (3+n)\, l_2/l_1][6 + (3+n)\, l_2/l_1]}$$

3 — VIGA DE QUATRO TRAMOS

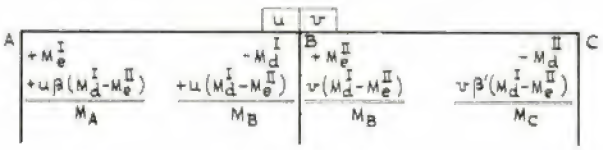
Analogamento ao indicado no n.° 2 teremos agora, para solicitações simétricas

$$u = \frac{(3+n)\, l_2}{4\, l_1 + (3+n)\, l_2} \qquad v = \frac{4\, l_1}{4\, l_1 + (3+n)\, l_2}$$

e para solicitação anti-simétrica

$$u = \frac{(3+n)\, l_2}{3\, l_1 + (3+n)\, l_2} \qquad v = \frac{3\, l_1}{3\, l_1 + (3+n)\, l_2}$$

A transmissão de momentos exprime-se conforme figura anexa



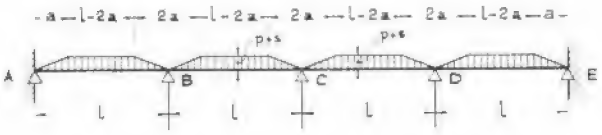
Na solicitação simétrica $\beta' = \frac{1}{2}$ e na anti-simétrica $\beta' = 0$; $\beta = \frac{2n}{3+n}$. Nesta última hipótese

$$u = \frac{3+n}{6+n} \qquad v = \frac{3}{6+n}$$

e na primeira,

$$u = \frac{3+n}{7+n} \qquad v = \frac{4}{7+n}$$

3.1 — *Cargas de distribuição trapezoidal para $l_1 = l_2 = l$*



A' carga permanente corresponde uma solicitação simétrica para a qual $M^{II}_e = M^{II}_d = \frac{pl^2}{12} \times$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]. \text{ Vem}$$

$$M_A = -k_A\, pl^2 \qquad k_A = \frac{2}{3}\,\frac{n}{7+n} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_B = -k_B\, pl^2 \qquad k_B = \frac{1}{12}\,\frac{9-n}{7+n} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_C = -k_C\, pl^2 \qquad k_C = \frac{1}{6}\,\frac{3+n}{7+n} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_D = -k_D\, pl^2 \qquad k_D = k_B$$

$$M_E = -k_E\, pl^2 \qquad k_E = k_A$$

A' sobrecarga no 1.° tramo corresponde uma sobrecarga simétrica $\frac{s}{2}$ no 1.° tramo mais outra $\frac{s}{2}$ anti-simétrica.

Os dois valores somam-se para a determinação de k^I_A e k^I_B e subtraem-se para k^I_D e k_E entrando a 2.ª parcela com o sinal negativo. Para k^I_C a 2.ª parcela é nula.

Na solicitação simétrica no 2.° tramo

$$M^{II}_e = M^{II}_d = \frac{sl^2}{24}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

e na solicitação anti- simétrica

$$M^{II}_e = \frac{pl^2}{16}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]; \quad M^{II}_d = 0$$

$$M^I_A = -k^I_A\, sl^2 \quad k^I_A = \frac{n}{24}\left[2 + \frac{3-n}{7+n} + \frac{3-n}{6+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M^I_B = -k^I_B\, sl^2 \qquad k^I_B = \frac{3-n}{48}\left[\frac{4}{7+n} + \frac{3}{6+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M^I_C = k^I_C\, sl^2$$

$$k^I_C = \frac{1}{24}\,\frac{3-n}{7+n}\left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M^I_D = -k^I_D\, sl^2 \qquad k^I_D = \frac{3-n}{48}\,\frac{3+n}{(6+n)(7+n)} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M^I_E = k^I_E\, sl^2 \qquad k^I_E = \frac{n}{24}\,\frac{3-n}{(6+n)(7+n)} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

De modo análogo, para a sobrecarga no 2.° tramo virá

$$M_A = +k^{II}_A\, sl^2 \qquad k^{II}_A = \frac{n}{24}\left[\frac{2}{7+n} + \frac{3}{6+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_B = -k^{II}_B\, sl^2 \qquad k^{II}_B = \frac{3+n}{48}\left[\frac{2}{7+n} + \frac{3}{6+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_C = -k^{II}_C\, sl^2 \qquad k^{II}_C = \frac{1}{24}\,\frac{9+n}{7+n} \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_D = +k^{II}_D\, sl^2 \qquad \left[k^{II}_D = \frac{3+n}{48}\,\frac{3}{6+n} - \frac{2}{7+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

$$M_E = -k^{I}_{E}\, sl^2 \qquad k^{II}_{E} = \frac{n}{24}\left[\frac{3}{6+n} - \frac{2}{7+n}\right] \times$$

$$\times \left[1 - \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left(2 - \frac{a}{l}\right)\right]$$

3.2 — *Cargas uniformemente distribuidas*

Para a carga permanente vem

$$M_A = -k_A\, pl^2_1 \qquad k_A = \frac{n}{6}\,\frac{2 + 3\, l_2/l_1 - (l_2/l_1)^3}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}$$

$$M_B = -k_B\, pl^2_1$$

$$k_B = \frac{1}{12}\,\frac{2\,(3-n) + (3+n)\,(l_2/l_1)^3}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}$$

$$M_C = -k_C\, pl^2_1$$

$$k_C = \frac{1}{12}\left[\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 - \frac{(3-n) - 2\,(l_2/l_1)^2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M_D = -k_D\, pl^2_1 \qquad k_D = k_B$$

$$M_E = -k_E\, pl^2_1 \qquad k_E = k_A$$

Para a sobrecarga no 2.º tramo temos

$$M^{II}_A = k_A\, sl^2_1$$

$$k^{II}_A = \frac{n}{24}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \left[\frac{2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{3 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{I}_B = -k_B\, sl^2_1$$

$$k^{II} = \frac{3+n}{48}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \left[\frac{2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{3 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{I}_C = -k_C\, sl^2_1$$

$$k^{II} = \frac{1}{24}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{II}_D = k_D\, sl^2_1$$

$$k = \frac{3+n}{48}\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3 \left[\frac{3}{3 + (3+n)\, l_2/l_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{II}_E = -k_E\, sl^2_1$$

$$k^{II}_E = \frac{n}{24}\left[\frac{3}{3 + (3+n)\, l_2/l_1} - \frac{2}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}\right] \times$$

$$\times \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^3$$

e finalmente para a sobrecarga no 1.º tramo

$$M^{I}_A = -k_A\, sl^2_1$$

$$k_A = \frac{n}{24}\left[2 + \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{4 + (3+n)\, l_2/l_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{3 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{I}_B = -k_B\, sl^2_1$$

$$k^{I}_B = \frac{3-n}{48}\left[2 - \frac{(3+n)\, l_2/l_1}{4 + (3+n)\, l_2/l_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{(3+n)\, l_2/l_1}{3 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

$$M^{I}_C = k_C\, sl^2_1 \qquad k^{I}_C = \frac{3-n}{24}\,\frac{1}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}$$

$$M^{I}_D = -k_D\, sl^2_1$$

$$k^{I}_D = \frac{3+n}{48}\left\{\frac{l_2/l_1\,(3+n)}{[4 + (3+n)\, l_2/l_1]\,[3 + (3+n)\, l_2/l_1]}\right\}$$

$$M^{I}_E = k_E\, sl^2_1$$

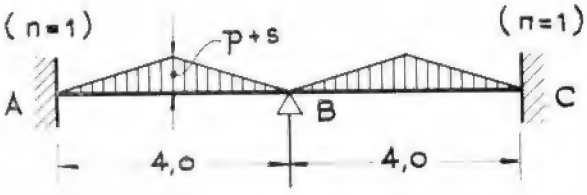
$$k^{I}_E = \frac{n}{24}\left[\frac{(3-n)\, l_2/l_1}{3 + (3+n)\, l_2/l_1} - \frac{(3-n)\, l_2/l_1}{4 + (3+n)\, l_2/l_1}\right]$$

4 — EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

As tabelas 1 a 2 para cargas de distribuição trapezoidal e 6 a 8, para cargas uniformemente distribuidas, permitem cálcular directamente os momentos flectores nos apoios. Não se apresentam coeficientes para os momentos máximos nos vão para não alongar excessivamente e também porque o seu valor depende, em geral, da relação entre a carga permanente e a sobrecarga. Com efeito, os respectivos máximos, isoladamente para cada um destes tipos de carga, em regra não se verificam na mesma secção de viga, e neste caso não podem somar-se para a obtenção do valor do momento final.

Exemplo 1

Cálculo dos esforços máximos na viga da figura, perfeitamente encastrada nos dois apoios extremos, sendo p = 2000 kg/m; s = 3000 kg/m.



Carga permanente:

$$M = M_A = M_D = -0{,}0521 \times 2000 \times 4{,}0^2 = -1.667 \text{ kgm}$$

Sobrecarga nos 1.° e 2.° tramos

$$M_A^I = -0{,}0651 \times 3000 \times 4{,}0^2 = -3.125 \text{ kgm} = M_D^{II}$$
$$M_B^I = -0{,}0260 \times 3000 \times 4{,}0^2 = -1.248 \text{ kgm} = M_B^{II}$$
$$M_C^I = -0{,}0130 \times 3000 \times 4{,}0^2 = +\ 624 \text{ kgm} = M_A^{II}$$

Máximos M_A, R_A e M_1 (sobrecarga no 1.° tramo)

$$\max M_A = -(1.667 + 3.125) = -4.792 \text{ kgm}$$
$$M_B = -(1.667 + 1.248) = -2.915 \text{ kgm}$$
$$\max R_A = \frac{2.000 + 3.000}{4} \times 4{,}0 + \frac{4.792 - 2.915}{4{,}0} = 5.469 \text{ kg}$$

Se fosse $R_A < \frac{p+s}{4}\, l$, o momento máximo verificava-se na secção de abcissa x dada por

$$x = \sqrt{\frac{R_A\, l}{p+s}}, \quad \max M_1 = M_A + R_A\, x - \frac{(p+s)\, x^2}{3l}$$

Como neste caso é $R_A > \frac{p+s}{4}\, l$, teremos

$$x = l - \sqrt{\frac{l^2}{2} - \frac{R_A\, l}{p+s}}; \quad \max M_1 = M_A + R_A\, x - \frac{(p+\ )\, l}{4}\left[x - \frac{l}{3} + \frac{(2\,l - x)\,(2\,x - l)^2}{3\,l^2}\right]$$

Neste exemplo $x = 4{,}0 - \sqrt{8{,}0 - \frac{5.469 \times 4{,}0}{5.000}} = 2{,}10$ m

$$\max. M_1 = -4.792 + 5.469 \times 2{,}10 - 5.000 \times \left[2{,}1 - 1{,}333 + \frac{5{,}9 \times 0{,}2^2}{48}\right] = 2.830 \text{ kgm}$$

Máximos M_B, T_{B1}, T_{B2} e R_B (sobrecarga geral)

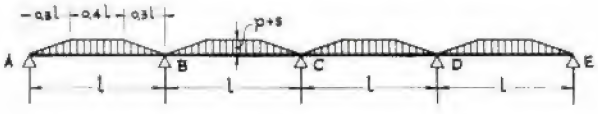
$$M_A = M_B = M_C = 0{,}0521\ (2.000 + 3.000) \times 4{,}0^2 = -4.170 \text{ kgm}$$

$$T_{B1} = T_{B2} = \frac{p+s}{4}\, l = 5.000 \text{ kg}$$

$$R_B = 2 \times 5.000 = 10.000 \text{ kg}$$

Exemplo 2

Cálculo dos esforços máximos na viga de 4 tramos de igual vão, simplesmente apoiada nos extremos A e E e sujeita a uma carga trapezoidal definida pela relação a/l = 0,30.



Consideramos só metade da viga, dada a sua simetria, e teremos:

$$M_A = M_E = 0$$

máximo M_B (sobrecarga nos 1.°, 2.° e 4.° tramos)

$$\text{Máx. } M_B = \text{máx. } M_D = -[k_B\, p + (k_B^I + k_B^{II} + k_B^{IV})\, s] = -[0{,}0907p + (0{,}0567 + 0{,}0416 + 0{,}0038)\, s]\ l^2 = -[0{,}0907p + 0{,}1021\, s)]\ l^2$$

máximo M_C (sobrecarga nos 2.° e 3.° tramos)

$$\text{máx. } M = -[k_C\, p + (k_C^{II} + k_C^{III})\, s]\ l^2 = -(0{,}0605p + 0{,}0908\, s)\ l^2$$

máx M_1 = máx. M_4, positivo nos 1.° e 4.° tramos (sobrecarga nos 1.° e 3.° tramos ou no 2.° e 4.° respectivamente)

$$M'_A = 0 \qquad M'_B = -[k_B\, p + (k_B^I + k_B^{II})s]\ l^2 = -(0{,}0907p + 0{,}0454\ s)\ l^2$$

$$\text{máx. } R_A = \frac{p+s}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right) l - \frac{M'_B}{l} = 0{,}3500\ (p+s)\ l - (0{,}0907p + 0{,}0454\ s)\ l = (0{,}2593p + 0{,}3046\ s)\ l$$

No caso de ser $R_A \leqslant \frac{p+s}{2}\, a$, máx. $M_1 = R_A\, x - \frac{(p+s)\, x^3}{6\, a}$

para $x = \sqrt{\frac{2\, a\, R_A}{p+s}}$ analogamente ao exemplo 1.°

No caso ser $\frac{p+s}{2}\, a \leqslant R_A \leqslant \frac{p+s}{2}\left(2 - 3\frac{a}{l}\right) l$,

como neste exemplo,

$$\text{máx. } M_1 = M_A + R_A\, x - \frac{p+s}{2}\left[\frac{a\,(3\,x - 2\,a)}{3} + \frac{(x-a)^2}{2}\right]$$

$$\text{para } x = \left(\frac{R_A}{p+s} + \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{No caso de ser } R_A \geqslant \frac{p+s}{2}\left(2 - 3\frac{a}{l}\right) l$$

$$\text{máximo } M_1 \text{ para } x = l - \sqrt{2\,a\,(l-a) - 2\,a\,\frac{R_A}{p+s}}$$

$$\text{máx. } M_1 = R_A\, x - (p+s)\left[a\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{3}\right) + (l - 2\,a)\left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{1}{6\,a}\, X \right.$$

$$\left. X \quad (a - l + x)^2\,(l - x + 2\,a)\right]$$

procedendo-se do mesmo modo para determinar máx. M_2 (substituindo R_A por T_{B2}).

máx. R_B (sobrecarga nos 1.°, 2.° e 4.° tramos)

$$M''_B = -\left[k_B\,p + (k^{I}_B + k^{II}_B + k^{IV}_B)\,s\right] l^2 = -\,(0{,}0907p + 0{,}1021\ s)\ l^2$$

$$T_{B1} = \frac{p+s}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right) l + \frac{M''_B}{l} = (0{,}4407p + 0{,}4521\ s)\ l^2$$

$$M''_C = -\left[k_C\,p + (k^{I}_C + k^{II}_C + k^{IV}_C)\,s\right] l^2 = -\,(0{,}0605p + 0{,}0454\ s)\ l^2$$

$$T_{B2} = \frac{p+s}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right) + \frac{M''_B - M''_C}{l} = (0{,}3198p + 0{,}3046\ s)\ l$$

$$\text{máx. } R_B = T_{B1} + T_{B2} = (0{,}7605p + 0{,}7567\ s)\ l$$

máx. M_C e máx. R_C (sobrecarga nos 2.° e 3.° tramos)

$$\text{máx. } M_C = -\left[0{,}0605p + (k^{II}_C + k^{III}_C)\,s\right] l^2 = -\,(0{,}0605p + 0{,}0908\ s)\ l^2$$

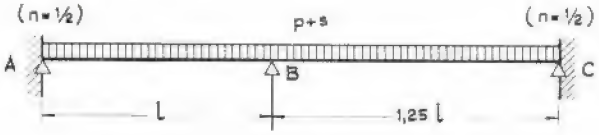
$$M^{III}_B = M^{II}_D = -\left[0{,}0907p + (k^{II}_B + k^{III}_B)\,s\right] l^2 = (0{,}0907p + 0{,}0303\ s)\ l^2$$

$$T_{C1} = T_{C2} = \frac{p+s}{2}\left(1 - \frac{a}{l}\right) l + \frac{M^{III}_B - M_C}{l} = (0{,}3297p + 0{,}2895\ s)\ l$$

$$\text{máx. } R_C = T_{C1} + T_{C2} = (0{,}6594p + 0{,}5790\ s)\ l^2$$

Exemplo 3

— Viga continua de dois tramos semi-encastrada nos apois extremos ($n = {}^1/_2$)



Carga permanente
$$\begin{cases} M_A = -\,0{,}0323\ pl^2 \\ M_B = -\,0{,}1370\ pl^2 \\ M_C = -\,0{,}0726\ pl^2 \end{cases}$$

Sobrecarga no 1.° tramo
$$\begin{cases} M^{I}_A = -\,0{,}0582\ sl^2 \\ M^{I}_B = -\,0{,}0463\ sl^2 \\ M^{I}_C = +\,0{,}0133\ sl^2 \end{cases}$$

Sobrecarga no 2.° tramo
$$\begin{cases} M^{II}_A = +\,0{,}0259\ sl^2 \\ M^{II}_B = -\,0{,}0907\ sl^2 \\ M^{II}_C = -\,0{,}0859\ sl^2 \end{cases}$$

a) Sobrecarga no 1.° tramo

$$\text{máx. } M_A = -\,(0{,}0323p + 0{,}0582\ s)\ l^2$$

$$\text{máx. } R_A = [(0{,}500 + 0{,}0323 - 0{,}1370)p + (0{,}500 - 0{,}0463)\ s]\ l^2 = (0{,}3953p + 0{,}5119\ s)\ l^2$$

$$\text{máx. } M_1 = M_A + R_A\ x - \frac{p+s}{2}\ x^2 \text{ sendo } X = \frac{R_A}{p+s}$$

a distância da secção de momento máximo positivo, ao apoio A. Vem

$$\text{máx. } M_1 = M_A + \frac{R_A^{\,2}}{2\,(p+s)}$$

b) sobrecarga nos 1.° e 2.° tramos

máx. $M_B = -0{,}1370\ (p + s)\ l^2$

máx. T_{B1} e T_{B2} e $R_B = T_{B1} + T_{B2}$

máx. $T_{B1} = [(0{,}5000 - 0{,}0323 + 0{,}1370)p + (0{,}500 - 0{,}0582 + 0{,}0463)\ s]\ l$

$= (0{,}6047p + 0{,}4881\ s)\ l$

máx. $T_{B2} = \frac{1}{1{,}25}\ [(0{,}500 + 0{,}1370 - 0{,}0726)p + (0{,}500 + 0{,}0463 - 0{,}0582)\ s]\ l =$

$= (0{,}5677p + 0{,}3880\ s)\ l$

máx. $R_B = (1{,}172p + 0{,}887\ s)\ l$

c) Sobrecarga no 2.° tramo

máx. $M_C = -(0{,}0726p + 0{,}0859\ s)\ l^2$

máx. $R_C = [(0{,}500 + 0{,}0726 - 0{,}1370)p + (0{,}500 + 0{,}500 + 0{,}0859 - 0{,}0907)\ s]\ l$

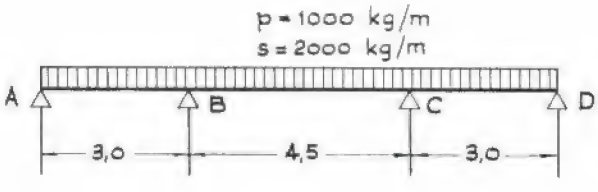
$= (0{,}4356p + 0{,}4952\ s)\ l$

máx. $M = M_C + R_C\,x - \frac{p+s}{2}\,x^2$ sendo $x\ \frac{R_C}{p+s}$

a distância da secção de momento positivo máximo ao apoio C

Exemplo 4

Cálculo dos momentos e esforços transversos máximos numa viga continua de três tramos conforme figura



Momento flector máximo no 2.° apoio (sobrecarga no 1.° e 2.° tramos)

$M_B = -[0{,}1683 \times 1000 + (0{,}1298 + 0{,}0549) \times 2000] \times 3{,}0^2 = -4840$ kgm

Momento positivo máximo M_2 no 2.° vão (2.°tramo carregado), que se verifica a meio do 2.° tramo, sendo então

$M'_B = -(0{,}1683 \times 1000 + 0{,}1298 \times 2000) \times 3{,}0^2 =$

$= -3850$ kgm

$M_2 = \frac{1000 + 2000}{8} \times 4{,}5^2 - 3850 = +3740$ kgm

Momento positivo máximo M_1 no 1.° tramo, (sobrecarga nos 1.° e 3.° tramos), sendo então

$M''_B = -[0{,}1683 \times 1000 + (0{,}0549 - 0{,}0165) \times 2000] \times 3{,}0^2 = -2200$ kgm

Este máximo M_1 verifica-se para $x = \frac{R'_A}{p+s}$

em que $R'_A = \frac{1000 + 2000}{2} \times 3{,}0 - \frac{2200}{3{,}0} =$

$= 3767$ kg ; $x = \frac{3767}{3000} = 1{,}26$ m

$M_1 = 3767 \times 1{,}26 - \frac{3000}{2} \times 1{,}26^2 = 2365$ kgm

Reacção máxima no 2.° apoio (sobrecarga nos 1.° e 3.° tramos, $M''_B = -2200$ kgm)

$R_A = \frac{1000 + 2000}{2} \times 3{,}0 - \frac{2200}{3{,}0} = 3770$ kg $= R_C$

Esforço transverso à esquerda do 2.° apoio (sobrecarga nos 1.° e 2.° tramos, $M_B = -4840$ kgm)

$T_{B1} = \frac{3000 \times 3{,}0}{2} + \frac{4840}{3{,}0} = 6115$ kg

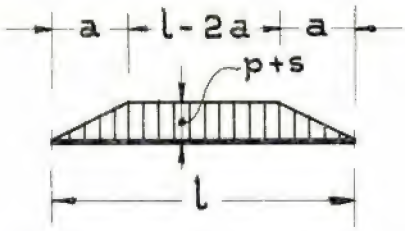
Esforço transverso à direita do 2.° apoio (sobrecarga nos 1.° e 2.° tramos, $M_B = -4840$ kgm) e

$M_C = -[0{,}1683 \times 1000 + (0{,}1298 - 0{,}0165) \times 2000] \times 3{,}0^2 = -3550$ kgm

$T_{B2} = \frac{3000 \times 4{,}5}{2} + \frac{4840 - 3550}{4{,}5} = 7040$ kgm

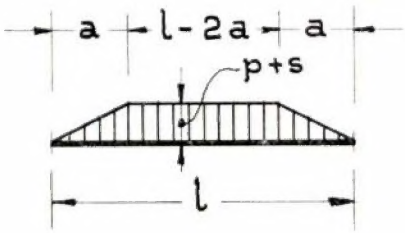
$R_B = T_{B1} + T_{B2} = 6115 + 7040 = 13155$ kg

TABELA 1 — Vigas contínuas simétricas de dois a quatro tramos iguais, com apoios simples (n = 0) nos dois apoios extremos e sujeitas a cargas de distribuição trapezoidal



Hipótese de carga	coeficientes		unif. distrib.	Cargas de distribuição trapezoidal Relações a/l										Triangular
			0,000	*0,250*	*0,275*	*0,300*	*0,325*	*0,350*	*0,375*	*0,400*	*0,425*	*0,450*	*0,475*	*0,500*
	$k_A = k_C$	$-pl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	k_B	$-pl^2$	0,1250	0,1113	0,1087	0,1059	0,1029	0,0997	0,0964	0,0930	0,0894	0,0858	0,0820	0,0781
	$k'_A = k''_C$	$-sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k'_B = k''_B$	$-sl^2$	0,0625	0,0557	0,0543	0,0529	0,0514	0,0499	0,0482	0,0465	0,0447	0,0429	0,0410	0,0391
	$k'_C = k''_A$	$+sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k_A = k_D$	$-pl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k_B = k_C$	$-pl^2$	0,1000	0,0891	0,0870	0,0847	0,0823	0,0798	0,0771	0,0744	0,0716	0,0686	0,0656	0,0625
	$k'_A = k'''_D$	$-sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k'_B = k'''_C$	$-sl^2$	0,0667	0,0594	0,0580	0,0565	0,0549	0,0532	0,0514	0,0496	0,0477	0,0457	0,0437	0,0417
	$k'_C = k'''_B$	$+sl^2$	0,0167	0,0148	0,0145	0,0141	0,0137	0,0133	0,0129	0,0124	0,0119	0,0114	0,0109	0,0104
	$k'_D = k'''_A$	$-sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k''_A = k''_D$	$+sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k''_B = k''_C$	$-sl^2$	0,0500	0,0445	0,0435	0,0424	0,0412	0,0399	0,0386	0,0372	0,0358	0,0343	0,0328	0,0313
	$k_A = k_E$	$-pl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k_B = k_D$	$-pl^2$	0,1071	0,0954	0,0932	0,0907	0,0882	0,0855	0,0827	0,0797	0,0767	0,0735	0,0703	0,0670
	k_C	$-pl^2$	0,0714	0,0636	0,0621	0,0605	0,0588	0,0570	0,0551	0,0531	0,0511	0,0490	0,0469	0,0446
	$k'_A = k^{IV}_E$	$-sl^2$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k'_B = k^{IV}_D$	$-sl^2$	0,0670	0,0596	0,0582	0,0567	0,0551	0,0534	0,0517	0,0498	0,0479	0,0459	0,0439	0,0419
	$k'_C = k^{IV}_C$	sl^2	0,0179	0,0159	0,0155	0,0151	0,0147	0,0142	0,0138	0,0133	0,0128	0,0123	0,0117	0,0112
	$k'_D = k^{IV}_B$	$-sl^2$	0,0045	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0029	0,0028
	$k'_E = k^{IV}_A$	sl^2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k''_A = k'''_E$	sl^2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	$k''_B = k'''_D$	$-sl^2$	0,0491	0,0437	0,0427	0,0416	0,0404	0,0392	0,0379	0,0365	0,0351	0,0337	0,0322	0,307
	$k''_C = k'''_C$	$-sl^2$	0,0536	0,0477	0,0466	0,0454	0,0441	0,0427	0,0413	0,0399	0,0383	0,0368	0,0351	0,0335
	$k''_D = k'''_B$	sl^2	0,0134	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107	0,0103	0,0100	0,0096	0,0092	0,0088	0,0084
	$k''_E = k'''_A$	sl^2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

TABELA 2 — Vigas continuas simétricas de dois a quatro tramos iguais, com encastramentos parciais (n = = 1/4) nos dois apoios extremos e sujeitas a cargas de distribuição trapezoidal



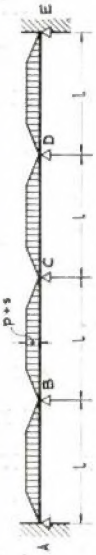
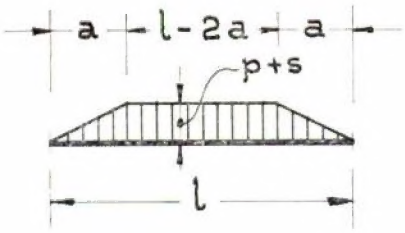
Hipótese de carga	coeficientes		unif. distrib.	Cargas de distribuição trapezoidal Relações a/l										Triangular
			0,000	*0,250*	*0,275*	*0,300*	*0,325*	*0,350*	*0,375*	*0,400*	*0,425*	*0,450*	*0,475*	*0,500*
	$k_A = k_C$	$- pl^2$	0,0208	0,0186	0,0181	0,0176	0,0171	0,0166	0,0161	0,0155	0,0149	0,0143	0,0137	0,0130
	k_B	$- pl^2$	0,1146	0,1021	0,0960	0,0971	0,0943	0,0914	0,0884	0,0852	0,0820	0,0786	0,0752	0,0716
	$k'_A = k''_C$	$- sl^2$	0,0296	0,0264	0,0258	0,0251	0,0244	0,0237	0,0229	0,0221	0,0212	0,0203	0,0194	0,0185
	$k'_B = k''_B$	$- sl^2$	0,0573	0,0510	0,0498	0,0485	0,0472	0,0457	0,0442	0,0426	0,0410	0,0393	0,0376	0,0358
	$k'_C = k''_A$	$+ sl^2$	0,0088	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0070	0,0068	0,0066	0,0063	0,0060	0,0058	0,0055
	$k_A = k_D$	$- pl^2$	0,0238	0,0212	0,0207	0,0202	0,0196	0,0190	0,0184	0,0177	0,0170	0,0163	0,0156	0,0149
	$k_B = k_C$	$- pl^2$	0,0952	0,0848	0,0828	0,0807	0,0784	0,0760	0,0735	0,0709	0,0681	0,0653	0,0625	0,0595
	$k'_A = k'''_D$	$- sl^2$	0,0294	0,0262	0,0256	0,0249	0,0242	0,0234	0,0227	0,0219	0,0210	0,0202	0,0193	0,0184
	$k'_B = k'''_C$	$- sl^2$	0,0590	0,0525	0,0513	0,0500	0,0486	0,0471	0,0455	0,0439	0,0422	0,0405	0,0387	0,0369
	$k'_C = k'''_B$	$+ sl^2$	0,0153	0,0137	0,0133	0,0130	0,0126	0,0122	0,0118	0,0114	0,0110	0,0105	0,0101	0,0096
	$k'_D = k'''_A$	$- sl^2$	0,0024	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0015	0,0015
	$k''_A = k''_D$	$+ sl^2$	0,0079	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	0,0059	0,0057	0,0054	0,0052	0,0050
	$k''_B = k''_C$	$- sl^2$	0,0516	0,0459	0,0449	0,0437	0,0425	0,0412	0,0398	0,0384	0,0369	0,0354	0,0338	0,0322
	$k_A = k_E$	$- pl^2$	0,0230	0,0205	0,0200	0,0195	0,0189	0,0183	0,0177	0,0171	0,0164	0,0158	0,0151	0,0144
	$k_A = k_D$	$- pl^2$	0,1006	0,0896	0,0875	0,0852	0,0828	0,0802	0,0776	0,0748	0,0720	0,0690	0,0660	0,0629
	k_C	$- pl^2$	0,0747	0,0665	0,0650	0,0633	0,0615	0,0596	0,0576	0,0556	0,0535	0,0513	0,0490	0,0467
	$k'_A = k^{IV}_E$	$- sl^2$	0,0294	0,0262	0,0255	0,0249	0,0242	0,0234	0,0227	0,0218	0,0210	0,0201	0,0193	0,0184
	$k'_B = k^{IV}_D$	$- sl^2$	0,0591	0,0526	0,0514	0,0501	0,0487	0,0472	0,0456	0,0440	0,0423	0,0406	0,0388	0,0369
	$k'_C = k^{IV}_C$	$+ sl^2$	0,0158	0,0141	0,0137	0,0134	0,0130	0,0126	0,0122	0,0118	0,0113	0,0108	0,0104	0,0099
	$k'_D = k^{IV}_B$	$- sl^2$	0,0041	0,0037	0,0036	0,035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
	$k'_E = k^{IV}_A$	sl^2	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
	$k''_A = k'''_E$	sl^2	0,0079	0,0070	0,0068	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061	0,0059	0,0056	0,0054	0,0052	0,0049
	$k''_B = k'''_D$	$- sl^2$	0,0512	0,456	0,0445	0,0433	0,0421	0,0408	0,0395	0,0381	0,0366	0,0351	0,0336	0,0320
	$k''_C = k'''_C$	$- sl^2$	0,0532	0,0473	0,0462	0,0450	0,0438	0,0424	0,0410	0,0396	0,0380	0,0365	0,0349	0,0332
	$k''_D = k'''_B$	sl^2	0,0138	0,0123	0,0120	0,0117	0,0114	0,0110	0,0107	0,0103	0,0099	0,0095	0,0091	0,0086
	$k''_E = k'''_A$	sl^2	0,0021	0,0019	0,0018	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0013

TABELA 3 — Vigas continuas simétricas de dois a quatro tramos iguais, com encastramentos parciais (n = = 1/2) nos dois apoios extremos e sujeitas a cargas de distribuição trapezoidal



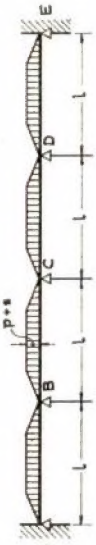
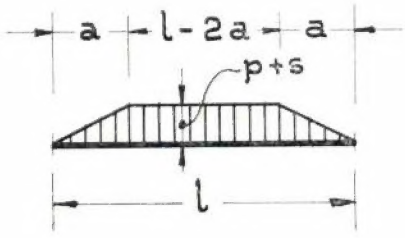
Hipótese de carga	coeficientes		unif. distrib.	Cargas de distribuição trapezoidal Relações a/l										Triangular
			0,000	0,250	0,275	0,300	0,325	0,350	0,375	0,400	0,425	0,450	0,475	0,500
	$k_A = k_C$	$-pl^2$	0,0417	0,0371	0,0362	0,0353	0,0343	0,0332	0,0321	0,0310	0,0298	0,0286	0,0273	0,0260
	k_B	$-pl^2$	0,1042	0,0928	0,0906	0,0882	0,0857	0,0831	0,0804	0,0775	0,0745	0,0715	0,0683	0,0651
	$k'_A = k''_C$	$-sl^2$	0,0565	0,0504	0,0492	0,0479	0,0465	0,0451	0,0436	0,0421	0,0405	0,0388	0,0371	0,0353
	$k'_B = k''_B$	$-pl^2$	0,0521	0,0464	0,0453	0,0441	0,0429	0,0416	0,0411	0,0387	0,0373	0,0357	0,0342	0,0326
	$k'_C = k''_A$	$+sl^2$	0,0149	0,0133	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0115	0,0111	0,0106	0,0102	0,0098	0,0093
	$k_A = k_D$	$-pl^2$	0,0455	0,0405	0,0395	0,0385	0,0374	0,0363	0,0351	0,0338	0,0325	0,0312	0,0298	0,0284
	$k_B = k_C$	$-pl^2$	0,0909	0,0810	0,0790	0,0770	0,0748	0,0725	0,0701	0,0676	0,0650	0,0624	0,0596	0,0568
	$k'_A = k'''_D$	$-sl^2$	0,0566	0,0504	0,0492	0,0480	0,0466	0,0452	0,0437	0,0421	0,0405	0,0388	0,0371	0,0354
	$k'_B = k'''_C$	$-sl^2$	0,0518	0,0462	0,0451	0,0439	0,0427	0,0414	0,0400	0,0386	0,0371	0,0356	0,0340	0,0324
	$k'_C = k'''_B$	$+sl^2$	0,0140	0,0124	0,0121	0,0118	0,0115	0,0111	0,0108	0,0104	0,0100	0,0096	0,0092	0,0087
	$k'_D = k'''_A$	$-sl^2$	0,0040	0,0036	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0027	0,0026	0,0025
	$k''_A = k''_D$	$+sl^2$	0,0152	0,0135	0,0132	0,0128	0,0125	0,0121	0,0117	0,0113	0,0318	0,0104	0,0099	0,0095
	$k''_B = k''_C$	$-sl^2$	0,0530	0,0472	0,0461	0,0449	0,0436	0,0423	0,0409	0,0395	0,0379	0,0364	0,0348	0,0331
	$k_A = k_E$	$-pl^2$	0,0444	0,0396	0,0386	0,0376	0,0366	0,0355	0,0343	0,0331	0,0318	0,0305	0,0292	0,0278
	$k_B = k_D$	$-pl^2$	0,0944	0,0841	0,0821	0,0800	0,0777	0,0754	0,0729	0,0703	0,0676	0,0648	0,0619	0,0590
	k_C	$-pl^2$	0,0778	0,0693	0,0676	0,0659	0,0640	0,0621	0,0600	0,0579	0,0557	0,0534	0,0510	0,0486
	$k'_A = k^{IV}_E$	$-sl^2$	0,0566	0,0504	0,0492	0,0480	0,0466	0,0452	0,0437	0,0421	0,0405	0,0389	0,0371	0,0354
	$k'_B = k^{IV}_D$	$-sl^2$	0,0518	0,0461	0,0451	0,0439	0,0426	0,0413	0,0400	0,0386	0,0371	0,0356	0,0340	0,0324
	$k'_C = k^{IV}_C$	sl^2	0,0139	0,0124	0,0121	0,0118	0,0114	0,0111	0,0107	0,0103	0,0099	0,0095	0,0091	0,0087
	$k'_D = k^{IV}_B$	$-sl^2$	0,0037	0,0033	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0023
	$k'_E = k^{IV}_A$	sl^2	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007
	$k'_A = k'''_E$	sl^2	0,0152	0,0135	0,0132	0,0128	0,0125	0,0121	0,0117	0,0113	0,0109	0,0104	0,0100	0,0095
	$k''_B = k'''_D$	$-sl^2$	0,0531	0,0473	0,0462	0,0450	0,0437	0,0424	0,0410	0,0395	0,0380	0,0364	0,0348	0,0332
	$k''_C = k'''_C$	$-sl^2$	0,0528	0,0470	0,0459	0,0447	0,0434	0,0421	0,0407	0,0393	0,0378	0,0362	0,0346	0,0330
	$k''_D = k'''_B$	sl^2	0,0142	0,0127	0,0124	0,0120	0,0117	0,0113	0,0110	0,0106	0,0102	0,0097	0,0093	0,0098
	$k''_E = k'''_A$	sl^2	0,0041	0,0036	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0025

TABELA 4 — Vigas continuas simétricas de dois a quatro tramos iguais, com encastramentos parciais ($n = 3/4$) nos dois apoios extremos e sujeitas a cargas de distribuição trapezoidal



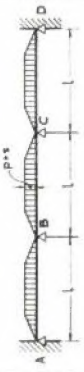
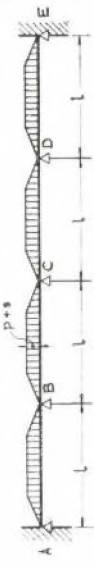
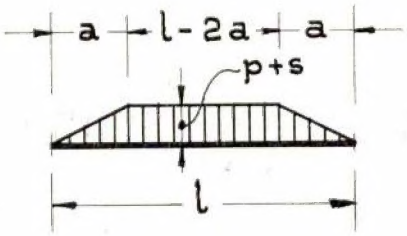
Hipótese de carga	coeficientes		unif. distrib.	Cargas de distribuição trapezoidal Relações a/l										Triangular
			0,000	*0,250*	*0,275*	*0,300*	*0,325*	*0,350*	*0,375*	*0,400*	*0,425*	*0,450*	*0,475*	*0,500*
	$k_A = k_C$	$- pl^2$	0,0625	0,0557	0,0543	0,0529	0,0514	0,0499	0,0482	0,0465	0,0447	0,0429	0,0410	0,0391
	k_B	$- pl^2$	0,0938	0,0835	0,0815	0,0794	0,0772	0,0748	0,0723	0,0698	0,0671	0,0643	0,0615	0,0586
	$k'_A = k''_C$	$- sl^2$	0,0813	0,0724	0,0707	0,0688	0,0669	0,0648	0,0627	0,0605	0,0581	0,0557	0,0533	0,0508
	$k'_B = k''_B$	$- sl^2$	0,0469	0,0417	0,0408	0,0397	0,0386	0,0374	0,0362	0,0349	0,0335	0,0322	0,0307	0,0293
	$k'_C = k''_A$	$+ sl^2$	0,0188	0,0167	0,0163	0,0159	0,0154	0,0150	0,0145	0,0140	0,0134	0,0129	0,0123	0,0117
	$k_A = k_D$	$- pl^2$	0,0652	0,0581	0,0567	0,0552	0,0537	0,0520	0,0503	0,0485	0,0467	0,0447	0,0428	0,0408
	$k_B = k_C$	$- pl^2$	0,0870	0,0774	0,0756	0,0737	0,0716	0,0694	0,0671	0,0647	0,0622	0,0597	0,0570	0,0543
	$k'_A = k'''_D$	$- sl^2$	0,0819	0,0730	0,0713	0,0694	0,0674	0,0654	0,0632	0,0610	0,0586	0,0562	0,0537	0,0512
	$k'_B = k'''_C$	$- sl^2$	0,0452	0,0402	0,0393	0,0382	0,0372	0,0360	0,0348	0,0336	0,0323	0,0310	0,0296	0,0282
	$k'_C = k'''_B$	$+ sl^2$	0,0125	0,0112	0,0109	0,0106	0,0103	0,0100	0,0097	0,0093	0,0090	0,0086	0,0082	0,0078
	$k'_D = k'''_A$	$- sl^2$	0,0050	0,0045	0,0044	0,0042	0,0041	0,0040	0,0039	0,0037	0,0036	0,0034	0,0033	0,0031
	$k''_A = k''_D$	$+ sl^2$	0,0217	0,0194	0,0189	0,0184	0,0179	0,0173	0,0168	0,0162	0,0156	0,0149	0,0143	0,0136
	$k''_B = k''_C$	$- sl^2$	0,0543	0,0484	0,0473	0,0460	0,0447	0,0434	0,0419	0,0404	0,0389	0,0373	0,0356	0,0340
	$k_A = k_E$	$- pl^2$	0,0645	0,0575	0,0561	0,0546	0,0531	0,515	0,0498	0,0480	0,0462	0,0443	0,0423	0,0403
	$k_A = k_D$	$- pl^2$	0,0887	0,0790	0,0771	0,0751	0,0730	0,0708	0,0684	0,0660	0,0635	0,0609	0,0582	0,0554
	k_C	$- pl^2$	0,0806	0,0718	0,0701	0,0683	0,0664	0,0643	0,0622	0,0600	0,0577	0,0553	0,0529	0,0504
	$k'_A = k^{IV}_E$	$- sl^2$	0,0820	0,0730	0,0713	0,0694	0,0675	0,0654	0,0633	0,0610	0,0587	0,0563	0,0538	0,0512
	$k'_B = k^{IV}_D$	$- sl^2$	0,0450	0,0401	0,0392	0,0381	0,0371	0,0359	0,0347	0,0335	0,0322	0,0309	0,0295	0,0281
	$k'_C = k^{IV}_C$	sl^2	0,0121	0,0108	0,0105	0,0102	0,0100	0,0097	0,0093	0,0090	0,0087	0,0083	0,0079	0,0076
	$k'_D = k^{IV}_B$	$- sl^2$	0,0034	0,0030	0,0029	0,0028	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021
	$k'_E = k^{IV}_A$	sl^2	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008
	$k''_A = k'''_E$	sl^2	0,0220	0,0196	0,0191	0,0186	0,0181	0,0175	0,0169	0,0164	0,0157	0,0151	0,0144	0,0137
	$k''_B = k'''_D$	$- sl^2$	0,0549	0,0489	0,0477	0,0465	0,0452	0,0438	0,0423	0,0408	0,0393	0,0377	0,0360	0,0343
	$k''_C = k'''_C$	$- sl^2$	0,0524	0,0467	0,0456	0,0444	0,0431	0,0418	0,0404	0,0390	0,0375	0,0360	0,0343	0,0328
	$k''_D = k'''_B$	sl^2	0,0146	0,0130	0,0127	0,0123	0,0120	0,0116	0,0112	0,0108	0,0104	0,0100	0,0096	0,0091
	$k''_E = k'''_A$	sl^2	0,0058	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048	0,0046	0,0045	0,0043	0,0042	0,0040	0,0038	0,0036

TABELA 5 — Vigas continuas simétricas de dois a quatro tramos iguais, com encastramentos perfeitos (n = = 1) nos dois apoios extremos e sujeitas a cargas de distribuição trapezoidal



Hipótese de carga	coeficientes		unif. distrib.	Cargas de distribuição trapezoidal Relações a/l										Triangular
			0,000	*0,250*	*0,275*	*0,300*	*0,325*	*0,350*	*0,375*	*0,400*	*0,425*	*0,450*	*0,475*	*0,500*
	$k_A = k_C$	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	k_B	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	$k^{I}_A = k^{II}_C$	$-sl^2$	0,1042	0,0928	0,0906	0,0882	0,0857	0,0831	0,0804	0,0775	0,0745	0,0715	0,0683	0,0651
	$k^{I}_B = k^{II}_B$	$-sl^2$	0,0417	0,0371	0,0362	0,0353	0,0343	0,0332	0,0321	0,0310	0,0298	0,0286	0,0273	0,0260
	$k^{I}_C = k^{II}_A$	$+sl^2$	0,0208	0,0186	0,0181	0,0176	0,0171	0,0166	0,0161	0,0155	0,0149	0,0143	0,0137	0,0130
	$k_A = k_D$	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	$k_B = k_C$	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	$k^{I}_A = k^{III}_D$	$-sl^2$	0,1056	0,0940	0,0918	0,0894	0,0869	0,0842	0,0814	0,0785	0,0755	0,0724	0,0692	0,0660
	$k^{I}_B = k^{III}_C$	$-sl^2$	0,0389	0,0346	0,0338	0,0329	0,0320	0,0310	0,0300	0,0289	0,0278	0,0267	0,0255	0,0243
	$k^{I}_C = k^{III}_B$	$+sl^2$	0,0111	0,0099	0,0097	0,0094	0,0091	0,0089	0,0086	0,0083	0,0080	0,0076	0,0073	0,0069
	$k^{I}_D = k^{III}_A$	$-sl^2$	0,0056	0,0049	0,0048	0,0047	0,0046	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0038	0,0036	0,0035
	$k^{II}_A = k^{II}_D$	$+sl^2$	0,0278	0,0247	0,0242	0,0235	0,0229	0,0222	0,0214	0,0207	0,0199	0,0191	0,0182	0,0174
	$k^{II}_B = k^{II}_C$	$-sl^2$	0,0556	0,0495	0,0483	0,0471	0,0457	0,0443	0,0429	0,0413	0,0398	0,0381	0,0364	0,0347
	$k_A = k_E$	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	$k_B = k_D$	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	k_C	$-pl^2$	0,0833	0,0742	0,0725	0,0706	0,0686	0,0665	0,0643	0,0620	0,0596	0,0572	0,0547	0,0521
	$k^{I}_A = k^{IV}_E$	$-sl^2$	0,1057	0,0941	0,0919	0,0895	0,0870	0,0843	0,0815	0,0786	0,0756	0,0725	0,0693	0,0660
	$k^{I}_B = k^{I}_D$	$-sl^2$	0,0387	0,0345	0,0336	0,0328	0,0318	0,0309	0,0298	0,0288	0,0277	0,0265	0,0254	0,0242
	$k^{I}_C = k^{IV}_C$	sl^2	0,0104	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0083	0,0080	0,0077	0,0075	0,0071	0,0068	0,0065
	$k^{I}_D = k^{IV}_B$	$-sl^2$	0,0030	0,0027	0,0026	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019
	$k^{I}_E = k^{IV}_A$	sl^2	0,0015	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009
	$k^{II}_A = k^{III}_E$	sl^2	0,0283	0,0252	0,0246	0,0239	0,0233	0,0226	0,0218	0,0210	0,0202	0,0194	0,0185	0,0177
	$k^{II}_B = k^{III}_D$	$-sl^2$	0,0565	0,0504	0,0492	0,0479	0,0465	0,0451	0,0436	0,0421	0,0485	0,0388	0,0371	0,0353
	$k^{II}_C = k^{III}_C$	$-sl^2$	0,0521	0,0464	0,0453	0,0441	0,0429	0,0416	0,0402	0,0387	0,0373	0,0357	0,0342	0,0326
	$k^{II}_D = k^{III}_B$	sl^2	0,0149	0,0133	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0115	0,0111	0,0106	0,0102	0,0098	0,0093
	$k^{II}_E = k^{III}_A$	sl^2	0,0074	0,0066	0,0065	0,0063	0,0061	0,0059	0,0057	0,0055	0,0053	0,0051	0,0049	0,0047